4

Del M-10.1 al M-35.8

MODELOS CORPÓREOS



	MODELOS CORPÓREOS	Modelo M-10.1

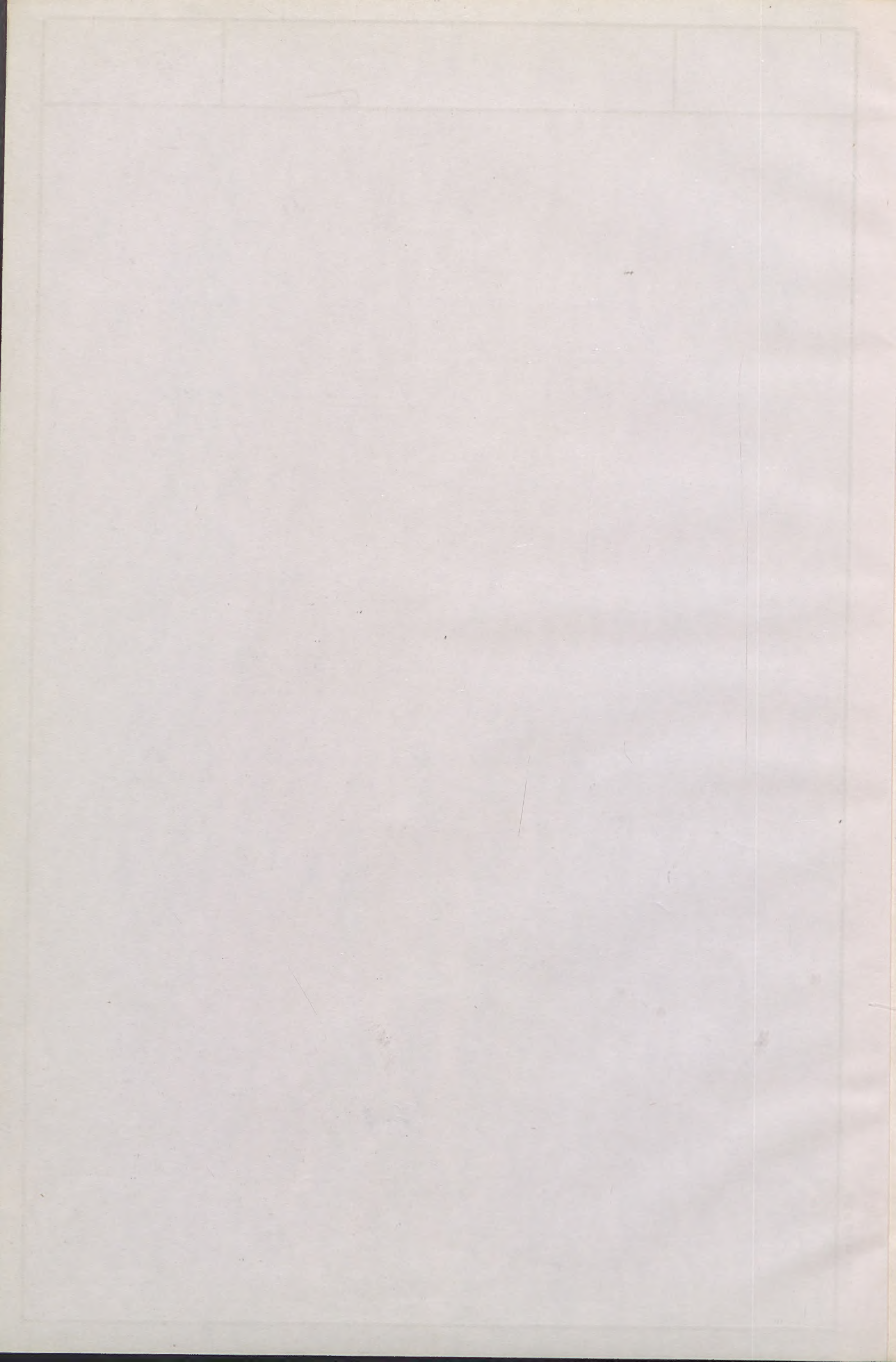
EJECUTADO

MODELO CORPÓREO DEL DODECAEDRO REGULAR CONVEXO, CONJUGADO DE UN ICOSADRO REGULAR CONVEXO, (GENERADOR) SIENDO LOS VÉRTICES DEL PRIMERO, LOS CENTROS DE LAS CARAS DEL SEGUNDO.- EL ICOSAEDRO GENERADOR, SERÁ DE CARAS VACIADAS, Y EL DODECAEDRO GENERADO, DE CARAS MACIZAS.

Radio de la esfera circunscrita al icosaedro generador:

$$r_{ec}^{20} = 76.1 \text{ mm.}$$

UNE A4 210 x 297



	Ejercicios de construcción de poliedros MODELOS CORPÓREOS	Modelo M - 10.1

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo del dodecaedro regular convexo, conjugado de un icosaedro regular convexo generador, siendo los vértices del primero, los centros de las caras del segundo. El icosaedro generador, se construirá con sus caras vaciadas, y el dodecaedro generado, con sus caras macizas.

DATO ÚNICO DE ESTE EJERCICIO:

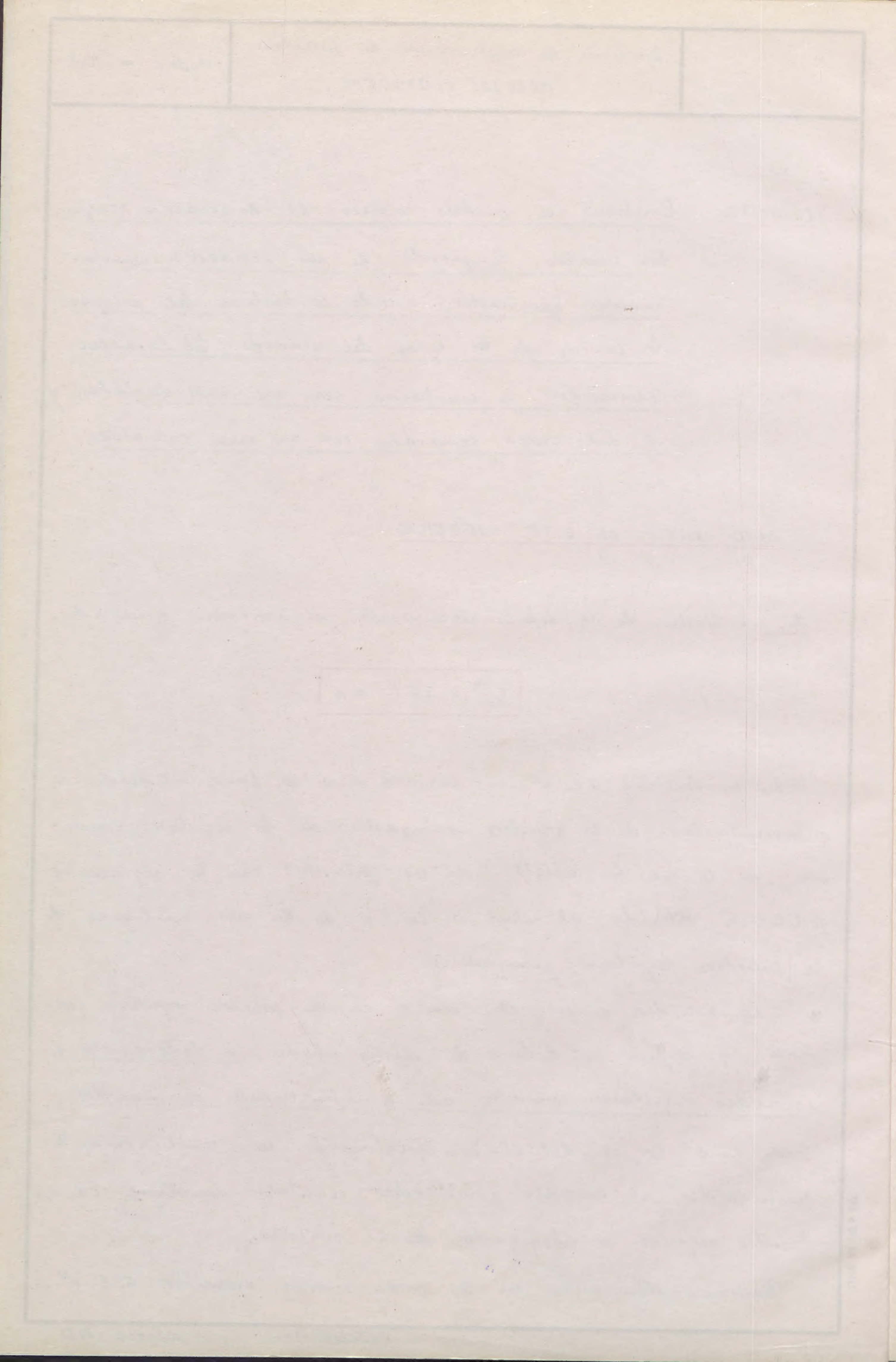
$r_{e_c}^{20}$ = Radio de la esfera circunscrita al icosaedro generador:

$$r_{e_c}^{20} = 76.1 \text{ mm}$$

En los ejercicios G.E. nº ---- Láminas 6 al 10, hemos estudiado la representación de los poliedros conjugados de los regulares convexos, en los que las aristas de los primeros son los segmentos rectilíneos obtenidos al unir los centros de dos caras contiguas de los poliedros regulares generadores.

Los poliedros conjugados son a su vez poliedros regulares convexos, y según se dedujo de dicho estudio, el dodecaedro e icosaedro regulares convexos, son mutuamente conjugados; (cada uno lo es del otro). Igualmente son mutuamente conjugados el exaedro y octaedro regulares convexos. El tetraedro regular es conjugado de sí mismo.

También obtuvimos en los mencionados ejercicios G. E. nº ---



Láminas 6 al 10, los valores analíticos de las magnitudes de los poliedros conjugados, en función de los respectivos poliedros generadores, cuyos valores nos servirán para la construcción de los modelos correspondientes.

Para la construcción de este modelo M - 10.1, calcularemos previamente las siguientes magnitudes, en función del único dato del problema (radio r_{ec}^{20} de la esfera circunscrita al icosaedro generador).

1) Arista "a_{20}" del icosaedro generador (en función de r_{ec}^{20})

Se deduce de la fórmula "$r_{ec}^{20} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} a_{20}$", obtenida en el ejercicio G.E. nº.... - Lámina 5. Despejando en ella "a_{12}", tendremos:

$$\boxed{a_{20}} = r_{ec}^{20} : \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} = 1 : \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} r_{ec}^{20} = \frac{4}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} r_{ec}^{20} =$$

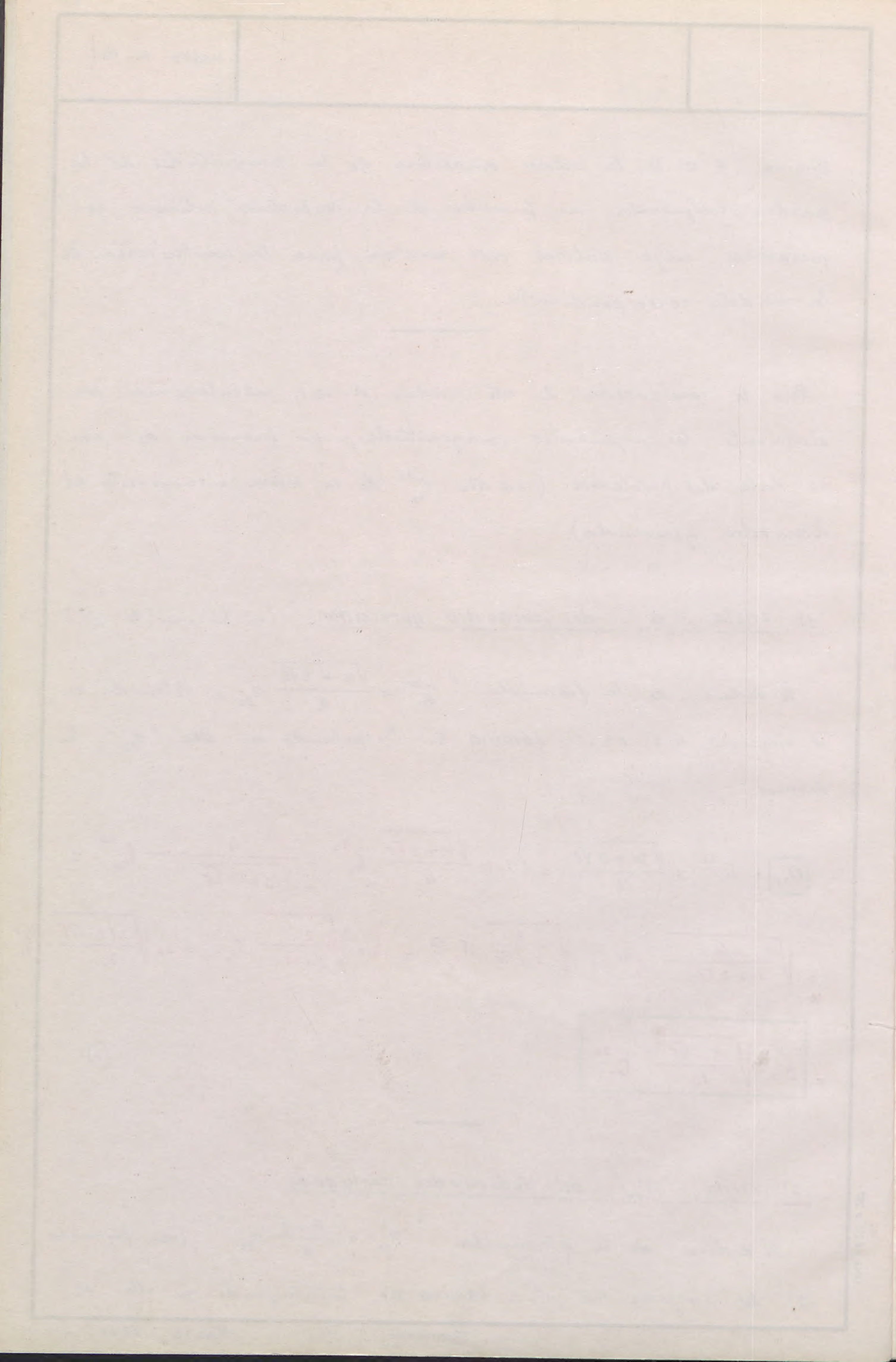
$$= \sqrt{\frac{16}{10+2\sqrt{5}}} r_{ec}^{20} = \sqrt{\frac{8}{5+\sqrt{5}}} r_{ec}^{20} = 2 \times \sqrt{\frac{2}{5+\sqrt{5}}} r_{ec}^{20} = 2 \times \sqrt{\frac{2(5-\sqrt{5})}{20}} r_{ec}^{20} =$$

$$= \boxed{2 \times \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}} r_{ec}^{20}} \quad (1)$$

---

2) Arista "a'_{12}" del dodecaedro conjugado

Se deduce de la fórmula "$a'_{12} = \frac{\sqrt{5}+1}{6} a_{20}$" (ver fórmula (2) del ejercicio G.E. nº... Lámina 10). Sustituyendo en ella el



Modelo M-10.1

valor (1), tendremos:

$$\boxed{a'_{12}} = \frac{1+\sqrt{5}}{6}\, a_{20} = \frac{1+\sqrt{5}}{6} \times 2\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\, r_{ec}^{20} = \frac{1}{3}\left(1+\sqrt{5}\right) \times \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\, r_{ec}^{20} =$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10} \times \left(1+\sqrt{5}\right)^2}\, r_{ec}^{20} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10} \times \left(1+5+2\sqrt{5}\right)}\, r_{ec}^{20} =$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{\frac{\left(5-\sqrt{5}\right)\left(6+2\sqrt{5}\right)}{10}}\, r_{ec}^{20} = \frac{1}{3} \times \sqrt{\frac{\left(5-\sqrt{5}\right)\left(3+\sqrt{5}\right)}{5}}\, r_{ec}^{20} =$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{\frac{15-3\sqrt{5}+5\sqrt{5}-5}{5}}\, r_{ec}^{20} = \boxed{\frac{1}{3} \times \sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{5}}\, r_{ec}^{20}} \qquad (2)$$

---

3) Radio "r_{i-3}" de la circunferencia inscrita al triángulo equilátero de una cara del icosaedro generador

Se obtiene de la fórmula "$r_{i-3} = \frac{\sqrt{3}}{6}\, a_{20}$" (ver fórmula (3) del ejercicio G.P. 1.400 - 42).- Sustituyendo en ésta el valor (1), tendremos:

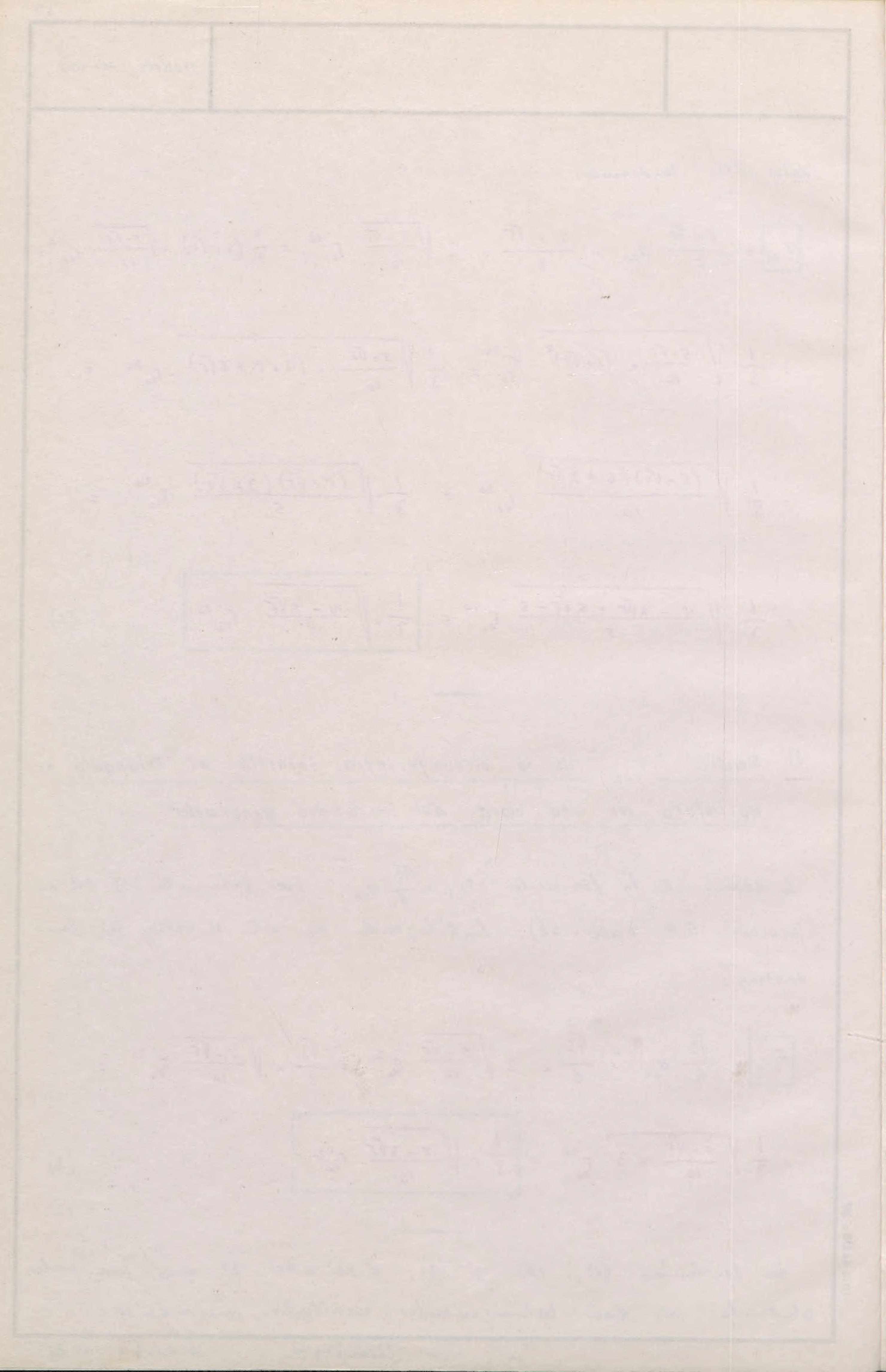
$$\boxed{r_{i-3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}\, a_{20} = \frac{\sqrt{3}}{6} \times 2\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\, r_{ec}^{20} = \frac{\sqrt{3}}{3} \times \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\, r_{ec}^{20} =$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10} \times 3}\, r_{ec}^{20} = \boxed{\frac{1}{3} \times \sqrt{\frac{15-3\sqrt{5}}{10}}\, r_{ec}^{20}} \qquad (3)$$

Las fórmulas (1), (2) y (3), aplicadas al caso particular estudiado, nos dan los siguientes resultados numéricos:

UNE A4 210 x 297

Calvarez Marzo 1981



$$\boxed{a_{20}} = 2 \times \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\; r_{ec}^{20} \cong 1{,}05\ 14\ 62\ 22\ 4\ldots \times 76{,}1 \cong \boxed{80{,}0 \text{ mm}} \qquad (1)$$

$$\boxed{a'_{12}} = \frac{1}{3} \times \sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{5}}\; r_{ec}^{20} \cong 0{,}56\ 71\ 00\ 53\ 9\ldots \times 76{,}1 \cong \boxed{43{,}2 \text{ mm}} \qquad (2)$$

$$\boxed{r_{i-3}} = \frac{1}{3} \times \sqrt{\frac{15-3\sqrt{5}}{10}}\; r_{ec}^{20} \cong 0{,}30\ 35\ 30\ 99\ 9\ldots \times 76{,}1 \cong \boxed{23{,}1 \text{ mm}} \qquad (3)$$

La magnitud (3) nos permite efectuar la fijación de los vértices del icosaedro conjugado, mediante su unión material de los mismos a los puntos medios de las aristas del icosaedro generador.

Para la construcción de este modelo, son necesarias las siguientes piezas:

A) ICOSAEDRO GENERADOR DE CARAS VACIADAS

PIEZA Nº 1 CARAS SUPERFICIALES 20 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 1

PIEZA Nº 1 20 (u)

Figura 1

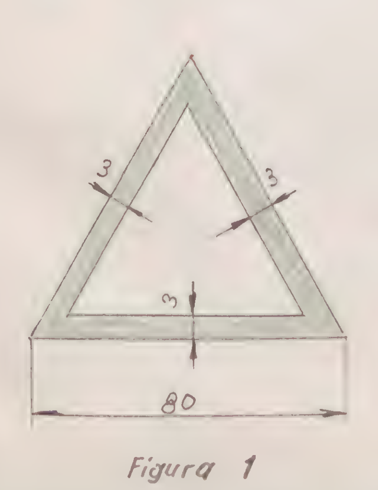


Figura 1

Alvarez Marzo 1981



Modelo M-10.1

PIEZA Nº 2 UNIONES ARISTAS 30 unidades

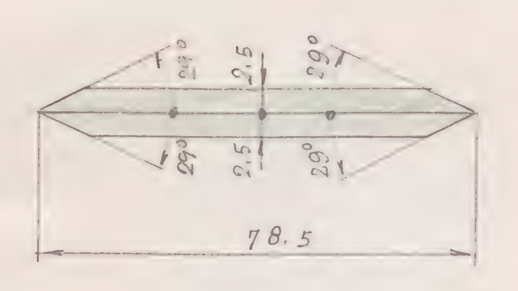


Figura 2

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 2

PIEZA Nº 2 30 (u)

Figura 2

B) DODECAEDRO CONJUGADO DE CARAS MACIZAS, CON PESTAÑAS DE FIJACIÓN DE SUS VÉRTICES A LOS PUNTOS MEDIOS DE LAS ARISTAS DEL ICOSAEDRO GENERADOR.

PIEZA Nº 3 CARAS SUPERFICIALES, CON PESTAÑAS.

12 unidades

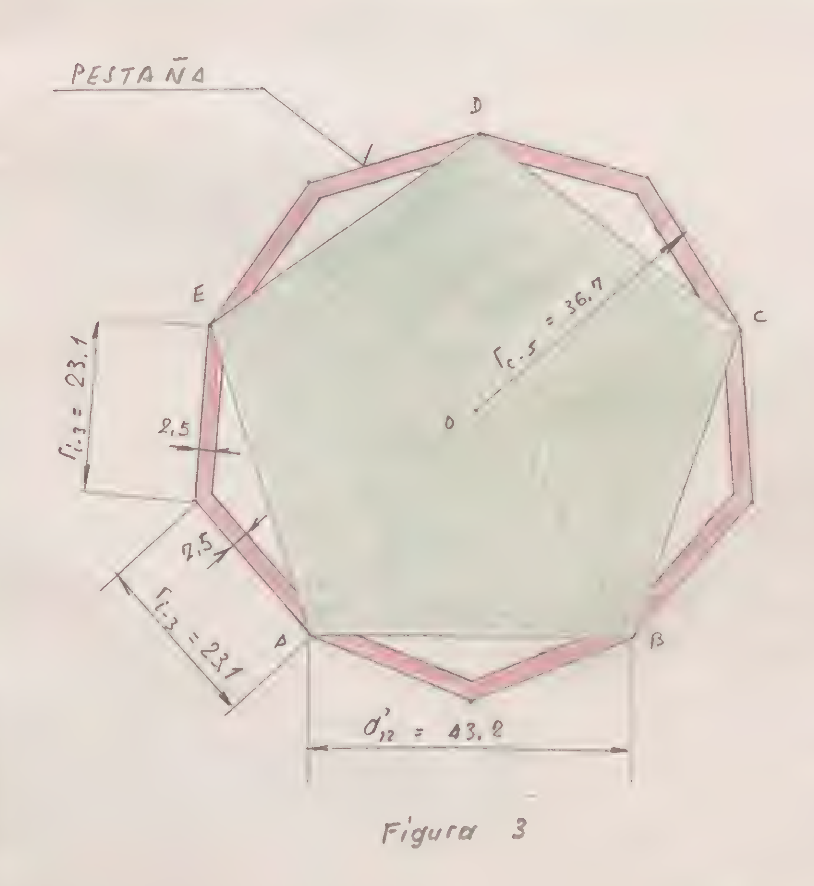


Figura 3

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 3

$$r_{c.5} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} \times 43.2 = 36.7\ mm$$

$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE} = \overline{EA} = 43.2\ mm$$

PIEZA Nº 3 12 (u)

Figura 3

UNE A4 210 x 297

[signature] Marzo 1981



Modelo M-10.1

PIEZA Nº 4 REFUERZO NORMAL EN CARAS SUPERFICIALES.

12 unidades

Figura 4

La forma y dimensiones se deducen de los dos pentágonos regulares convexos ABCDE de la figura 3, y se detallan en la figura nº 4.

AB = BC = CD = DE = EA = 43.2 mm

PIEZA Nº 4 12 (u)

Figura 4

PIEZA Nº 5 REFUERZO TRANSVERSAL INTERIOR EN CARAS SUPERFICIALES 24 unidades

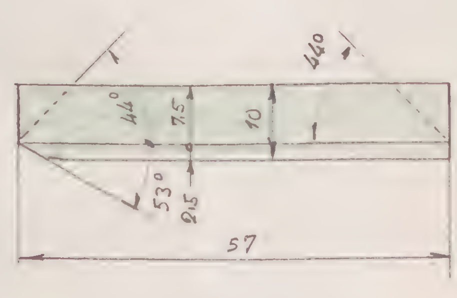


Figura 5

La forma y dimensiones se detallan en la figura 5; su colocación en la figura 4.

PIEZA Nº 5 24 (u)

Figura 5

PIEZA Nº 6 UNIONES ARISTAS 30 unidades

La forma y dimensiones se detallan en la figura 6

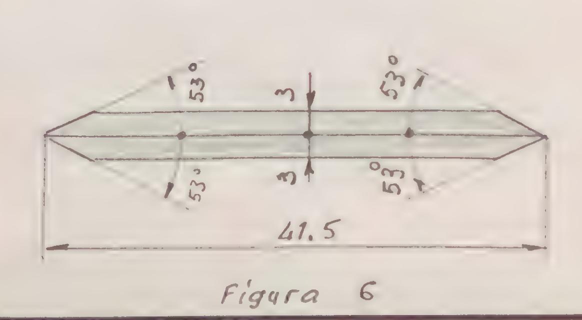


Figura 6

PIEZA Nº 6 30 (u)

Figura 6

Alvarez Marzo 1981

UNE A4 210 x 297



		Modelo M-10.1

PIEZA Nº 7 FORRO COLOREADO · 12 unidades

Su forma y dimensiones se deducen de las del pentágono ABCDE de la figura 3, y se detallan en la figura 7.

D C E A B

2 2 2 2 a

$r_{c.s} = 36.7$

$a'_{12} = 43.2$

Figura 7

PIEZA Nº 7 12 (u).

Figura 7

UNE A4 210 x 297

Calvaux Marzo 1981

MODELO CORPÓREO DEL DODECAEDRO REGULAR CONVEXO, OBTENIDO POR TRUNCADURA DE VÉRTICES DE UN ICOSAEDRO REGULAR CONVEXO GENERADOR, DE ARISTA "a_{20}", A LA DISTANCIA "$x = \frac{2}{3} a_{20}$", SIENDO LA LONGITUD "$a'_{12} = \frac{1+\sqrt{5}}{6} a_{20}$" DEL DODECAEDRO GENERADO. EL DODECAEDRO GENERADO, SE CONSTRUIRÁ CON LAS CARAS MACIZAS, Y EL ICOSAEDRO GENERADOR, CON LAS CARAS VACIADAS

Radio de la esfera circunscrita al icosaedro generador:

$$r_{ec}^{20} = 110 \text{ mm.}$$

	MODELOS CORPÓREOS	Modelo M-10.2

ENUNCIADO EQUIVALENTE

MODELO CORPÓREO DEL DODECAEDRO REGULAR CONVEXO, CONJUGADO DE UN ICOSAEDRO REGULAR CONVEXO, (GENERADOR), CUANDO LOS VÉRTICES DEL PRIMERO, SON LOS CENTROS DE LAS CARAS DEL SEGUNDO.- EL ICOSAEDRO GENERADOR, SE CONSTRUIRÁ CON SUS CARAS VACIADAS, Y EL DODECAEDRO GENERADO, CON SUS CARAS MACIZAS.

Radio de la esfera circunscrita al icosaedro generador:

$$r_{ee}^{20} = 110 \text{ mm.}$$

UNE A4 210 x 297



ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo del dodecaedro regular convexo, conjugado de un icosaedro regular convexo (generador), cuando los vértices del primero, son los centros de las caras del segundo.- El icosaedro generador, se construirá con sus caras vaciadas y el dodecaedro generado, con sus caras macizas.

DATO ÚNICO DE ESTE EJERCICIO:

$r_{e_c}^{20}$ = Radio de la circunferencia circunscrita al icosaedro generador:

$$r_{e_c}^{20} = 110 \text{ mm}$$

Este modelo puede considerarse como una variante del modelo M - 10.1, de igual forma que éste, pero de mayor tamaño, por ser $r_{e_c}^{20} = 110 \text{ mm} > 76.1 \text{ mm}$.

También hacemos destacar que este modelo puede ser generado de forma distinta al del enunciado dado, teniendo presente el estudio realizado en el modelo en el modelo M - 39.7, en el que se estudió la posibilidad de obtención de algunos poliedros arquimedianos por el proceso de "truncadura de vértices" de los cinco poliedros regulares convexos. En

UNE A4 210 x 297



dicho estudio se analizó detalladamente los distintos poliedros (arquimedianos, regulares e irregulares) que pueden obtenerse por el mencionado proceso de "truncadura de vértices del tetraedro regular convexo", en todas las posibles posiciones del plano secante. Dicho proceso puede ser aplicado a los cuatro poliedros regulares restantes (exaedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro), con análogos resultados de los que se obtuvieron en el tetraedro regular convexo. Por consiguiente, para el caso particular de este modelo, podemos enunciar directamente la siguiente proposición:

"El dodecaedro regular convexo puede ser engendrado por la truncadura de vértices de un icosaedro regular convexo, cuyo plano secante pasa por el centro "G" de las cinco caras triangulares regulares, concurrentes en cada uno de sus vértices. Este plano secante puede situarse por cinco punto equidistantes de dicho vértice, y sobre las cinco aristas concurrentes en él, a la distancia "$x = \frac{2}{3} a_{20}$" siendo "a_{20}" la arista del icosaedro generador. La longitud "a'_{12}" de la arista del dodecaedro generado, será "$a'_{12} = \frac{1+\sqrt{5}}{6} a_{20}$".

Las dos últimas fórmulas serán deducidas posteriormente (ver fórmulas (1) y (2')).

El dodecaedro generado, tiene sus vértices en los centros



"G" de las caras triangulares del icosaedro generador.

Como consecuencia de lo expuesto anteriormente, podemos establecer un nuevo enunciado al problema planteado en este ejercicio, equivalente al de este mismo modelo M-10.2, bajo el nuevo enfoque del mismo, que es el siguiente:

NUEVO ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo del dodecaedro regular convexo, obtenido por truncadura de vértices del icosaedro regular convexo generador, a la distancia "$x = \frac{2}{3}\, a_{20}$", siendo "a_{20}" la arista del icosaedro generador. La longitud de la arista "a'_{12}" del dodecaedro generado, será: $a'_{20} = \frac{1+\sqrt{5}}{6}\, a_{20}$

—

En esta nueva construcción, efectuaremos otra forma distinta a la del modelo M-10.1, para la fijación al icosaedro generador, del dodecaedro engendrado en su interior.

Como el dodecaedro generado, ha de construirse con sus caras macizas, y el icosaedro generador, con sus caras vaciadas, para poder situar en su posición correcta este último, construiremos sobre las doce caras pentagonales del mencionado dodecaedro conjugado, otras tantas pirámides auxiliares, rectas, regulares, de base pentagonal, cuyos vértices servirán de apoyo a los doce vértices del icosaedro generador.

—



Modelo M-10.2

Previamente, efectuaremos los cálculos de las longitudes siguientes:

1) <u>Distancia "x" de la truncadura de vértices en el icosaedro generador, de arista "a_{20}"</u> (en función de a_{20})

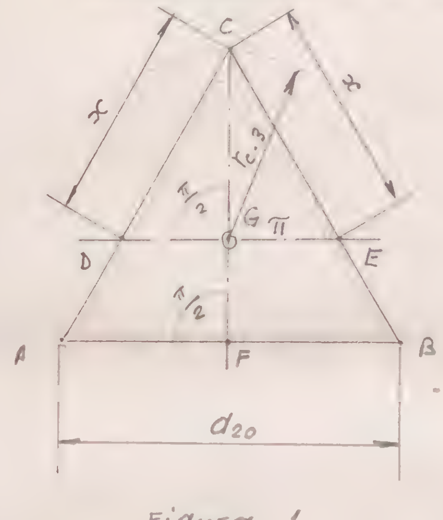


Figura 1

Sea (figura 1) ABC el triángulo regular de una cara del icosaedro generador, de arista $\overline{AB} = a_{20}$, y G su centro.

Unamos C con G, y tracemos por G la perpendicular a GC, que cortará en D y E a los lados CA y CB concurrentes en C, y en el punto F al lado AB.

De la construcción anterior se deduce que los triángulos rectángulos CDG y CAF, son semejantes, siendo a su vez $CG = \frac{2}{3}\ CF$, por lo que será:

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{CG}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{CF}} \quad \text{y de aquí:} \quad \overline{CD} = \frac{\overline{CA} \times \overline{CG}}{\overline{CF}}$$

en la que sustituyendo valores, tendremos finalmente

$$\boxed{x} = \frac{a_{20} \times \frac{2}{3}\ \overline{CF}}{\overline{CF}} = \boxed{\frac{2}{3}\ a_{20}} \qquad (1)$$

UNE A4 210 x 297



		Modelo M-10.2

2) Arista "a_{20}" del icosaedro generador (en función de r_{ec}^{20})

Su valor ha sido ya calculado en el ejercicio M-10.1, fórmula (1)

$$a_{20} = 2 \times \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\; r_{ec}^{20} \qquad (2)$$

3) Arista "a_{12}" del dodecaedro conjugado (en función de r_{ec}^{20})

Refiriéndonos a la figura 1, destaquemos que "la truncadura de vértices del icosaedro generador" de arista a_{20}, cuando el plano secante π pasa por el centro "G" de una cara del mismo ABC, corta a ésta según la traza DE, perpendicular a la altura CF, y a las aristas CA y CB, en los puntos D y E, equidistantes de C, a la distancia $x = \frac{2}{3} a_{20}$. Igual ocurrirá en las cinco caras restantes concurrentes en C. Por consiguiente, el plano secante π de dicha truncadura de vértices, cortará a las cinco caras concurrentes en C, según un pentágono, cuyos lados son iguales al DE, y que a su vez formarán ángulos iguales en cada uno de los diedros formados por dos caras consecutivas; así pues dicho pentágono será regular y la unión de los puntos medios de sus lados, formarán a su vez otro pentágono regular, cara del dodecaedro conjugado al icosaedro generador, cuyos vértices estarán situados en los centros G de las caras de dicho icosaedro, según se aclara en la figura 2, en la que DE = x (ver fig. 1) y G es el centro de DE

UNE A4 210 x 297



Modelo M-10.2

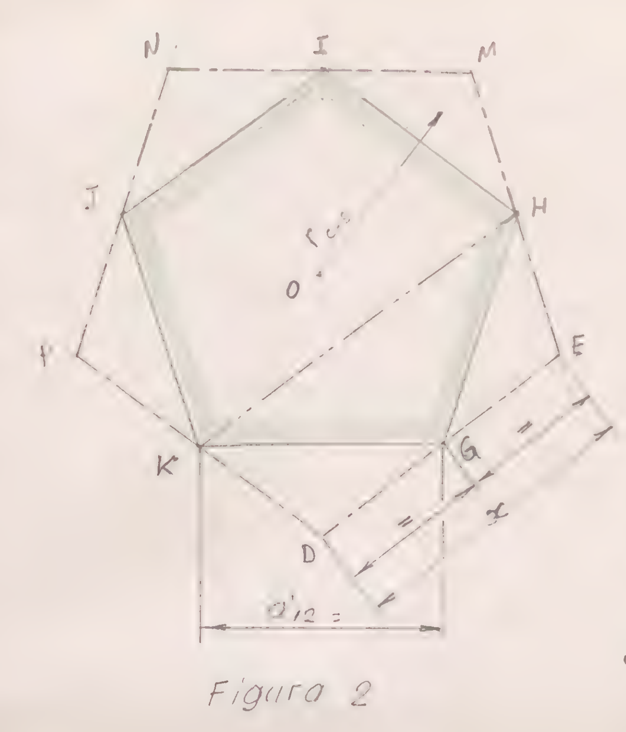


Figura 2

En la figura 2, tenemos el pentágono regular G H I J K, de lado a'_{12} obtenido al unir los puntos medios del pentágono regular DEMNP, de lado DE = x.

El pentágono regular G H I J K es una de las caras del dodecaedro regular convexo, conjugado del icosaedro generador, cuyos vértices son los centros G de sus caras. Así pues, llegamos a la conclusión final de que "La arista "a'_{12}" del dodecaedro regular convexo, núcleo de la truncadura de vértices de un icosaedro regular convexo de arista "a_{20}", y a la distancia $x = \frac{2}{3} a_{20}$ (ver fórmula 1), tiene por longitud la del segmento KG (fig. 2)

De la semejanza de los triángulos isósceles HKG y GKD, se deduce

$\frac{\overline{HK}}{\overline{KG}} = \frac{\overline{KG}}{\overline{DG}}$ por lo que $\overline{KG}^2 = \overline{HK} \times \overline{DG}$ en la que es

$\overline{KG} = a'_{12}$; $\overline{DG} = \frac{x}{2} = \frac{2}{3} a_{20} : 2 = \boxed{\frac{1}{3} a_{20}}$ y $\overline{HK}$ = diagonal de un pentágono de lado a'_{12} ; su valor es (ver fórmula (6) del ejercicio G.P. 1400-44)

$\overline{HK} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \times l_5 = \boxed{\frac{\sqrt{5}+1}{2} a'_{12}}$ y sustituyendo estos valores en $\overline{KG}^2 = \overline{HK} \times \overline{DG}$, tendremos:

Calvache Marzo 1981

UNE A4 210 x 297



$$\left(a'_{12}\right)^2 = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \times a'_{12} \times \frac{1}{3} a_{20} \quad ;; \quad \boxed{a'_{12} = \frac{\sqrt{5}+1}{6} a_{20}} \quad ; \quad \text{fórmula } (2')$$

que nos da a'_{12} en función de a_{20}; para obtenerla en función de r_{ec}^{20} (dato del ejercicio), sustituiremos a_{20} por su valor de la fórmula (2), ya obtenida, por lo que tendremos:

$$\boxed{a'_{12}} = \frac{\sqrt{5}+1}{6} a_{20} = \frac{\sqrt{5}+1}{6} \times 2 \times \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\, r_{ec}^{20} = \frac{1}{3}\left(\sqrt{5}+1\right)\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\, r_{ec}^{20} =$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{\frac{\left(5-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{5}+1\right)^2}{10}}\, r_{ec}^{20} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{\left(5-\sqrt{5}\right)\left(5+1+2\sqrt{5}\right)}{10}}\, r_{ec}^{20} =$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{\frac{\left(5-\sqrt{5}\right)\left(6+2\sqrt{5}\right)}{10}}\, r_{ec}^{20} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{\left(5-\sqrt{5}\right)\left(3+\sqrt{5}\right)}{5}}\, r_{ec}^{20} =$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{\frac{15-3\sqrt{5}+5\sqrt{5}-5}{5}}\, r_{ec}^{20} = \boxed{\frac{1}{3}\sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{5}}\, r_{ec}^{20}}$$

de donde se obtiene finalmente:

$$\boxed{a'_{12} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{5}}\, r_{ec}^{20}} \qquad (3)$$

valor coincidente con el de la fórmula (2) del ejercicio M-10.1, obtenido por otro proceso diferente.



Modelo M-10.2

3) Radio "$r_{c\text{-}5}$" de la circunferencia circunscrita al pentágono regular convexo de una cara del dodecaedro conjugado.

Su valor se obtiene de la fórmula "$r_{c\text{-}5} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\, l_5$" deducida en el ejercicio (3) G.P. 1400-44), haciendo en ella $l_5 = a'_{12} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{5}}\, r_{ec}^{20}$ (ver fórmula (3)). Así pues, será:

$$\boxed{r_{c\text{-}5}} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} \times \frac{1}{3} \times \sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{5}}\, r_{ec}^{20} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{(5+\sqrt{5})(10+2\sqrt{5})}{50}}\, r_{ec}^{20} =$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2(5+\sqrt{5})^2}{50}}\, r_{ec}^{20} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{(5+\sqrt{5})^2}{25}}\, r_{ec}^{20} = \frac{1}{3} \times \frac{5+\sqrt{5}}{5}\, r_{ec}^{20} =$$

$$= \boxed{\frac{5+\sqrt{5}}{15}\, r_{ec}^{20}} \qquad (4)$$

4) Radio "$r_{ei}^{12'}$" de la esfera inscrita al dodecaedro conjugado

Su valor se obtiene de la fórmula "$r_{ei}^{12} = \sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{40}}\, a_{12}$", deducida en el ejercicio G.E. nº... Lámina 4, en función de su arista "a_{12}"; haciendo en ella $r_{ei}^{12} = r_{ei}^{12'}$ y $a_{12} = a'_{12} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{5}}\, r_{ec}^{20}$ (ver fórmula (3)), tendremos:

$$\boxed{r_{ei}^{12'}} = \sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{40}}\, a_{12} = \sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{40}} \times \frac{1}{3} \times \sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{5}}\, r_{ec}^{20} =$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{\frac{(25+11\sqrt{5})(5+\sqrt{5}) \times 2}{40 \times 5}}\, r_{ec}^{20} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{(25+11\sqrt{5})(5+\sqrt{5})}{20 \times 5}}\, r_{ec}^{20} =$$

UNE A4 210 x 297

TAlvarez Marzo 1981



$$= \frac{1}{3}\sqrt{\frac{125 + 55\sqrt{5} + 25\sqrt{5} + 55}{100}}\, r_{ec}^{20} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{180 + 80\sqrt{5}}{100}}\, r_{ec}^{20} =$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{\frac{9 + 4\sqrt{5}}{5}}\, r_{ec}^{20} = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{9 + 4\sqrt{5}}}{\sqrt{5}}\, r_{ec}^{20} = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{\frac{10}{2}} + \sqrt{\frac{8}{2}}}{\sqrt{5}}\, r_{ec}^{20} =$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{5} + 2}{\sqrt{5}}\, r_{ec}^{20} = \frac{1}{3} \times \frac{5 + 2\sqrt{5}}{5}\, r_{ec}^{20} = \boxed{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{15}\, r_{ec}^{20}}\ .$$

de donde se obtiene finalmente:

$$\boxed{r_{ei}^{12'} = \frac{5 + 2\sqrt{5}}{15}\, r_{ec}^{20}} \qquad (5)$$

---

5) Altura "h_5" de las pirámides auxiliares, rectas, pentagonales, regulares.

Se obtiene como diferencia del radio "r_{ec}^{20}" de la esfera circunscrita al icosaedro generador (dato del ejercicio), y del radio "$r_{ei}^{12'}$" (fórmula 5). Así pues, será:

$$\boxed{h_5} = r_{ec}^{20} - r_{ei}^{12'} = r_{ec}^{20} - \frac{5 + 2\sqrt{5}}{15}\, r_{ec}^{20} = \left(1 - \frac{5 + 2\sqrt{5}}{15}\right) r_{ec}^{20} = \boxed{\frac{10 - 2\sqrt{5}}{15}\, r_{ec}^{20}} \qquad (6)$$

---

6) Arista "a_5" de las pirámides auxiliares, rectas, pentagonales, regulares

Su valor es el de la hipotenusa de un triángulo rectángulo, cuyos catetos son: Uno, la altura "$h_5 = \frac{10 - 2\sqrt{5}}{15}\, r_{ec}^{20}$" (ver fór-



mula (6)), y el otro, el radio "$r_{c-5} = \frac{5+\sqrt{5}}{15} r_{ec}^{20}$" (ver fórmula (4)).- Así pues, tendremos:

$$\boxed{a_5} = \sqrt{(h_5)^2 + (r_{c-5})^2} = \sqrt{\left(\frac{10-2\sqrt{5}}{15} r_{ec}^{20}\right)^2 + \left(\frac{5+\sqrt{5}}{15} r_{ec}^{20}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{(10-2\sqrt{5})^2}{15^2} + \frac{(5+\sqrt{5})^2}{15^2}}\, r_{ec}^{20} = \sqrt{\frac{100+20-40\sqrt{5}+25+5+10\sqrt{5}}{15^2}}\, r_{ec}^{20} =$$

$$= \sqrt{\frac{150-30\sqrt{5}}{15^2}}\, r_{ec}^{20} = \boxed{\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{15}}\, r_{ec}^{20}} \qquad (7)$$

Las fórmulas (2), (3) y (7), aplicadas al caso particular estudiado, nos dan los siguientes valores numéricos: ($r_{ec}^{20} = 110$ mm)

$$\boxed{a_{20}} = 2 \times \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\, r_{ec}^{20} \cong 1{,}05\ 14\ 62\ 22\ 4\ldots \times 110 \cong \boxed{115{,}7 \text{ mm}} \qquad (2)$$

$$\boxed{a'_{12}} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{5}}\, r_{ec}^{20} \cong 0{,}56\ 71\ 00\ 53\ 9\ldots \times 110 \cong \boxed{62{,}4 \text{ mm}} \qquad (3)$$

$$\boxed{a_5} = \sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{15}}\, r_{ec}^{20} \cong 0{,}36\ 85\ 24\ 27\ 0\ldots \times 110 \cong \boxed{66{,}8 \text{ mm}} \qquad (7)$$

La magnitud (7) nos permite efectuar la fijación de los vértices del dodecaedro conjugado, y situarlos en los centros de las caras del icosaedro generador.

UNE A4 210 x 297

Álvarez — Mayo 1981



NOTA.- El valor de la magnitud "$\overline{a_5}$" fórmula (7), puede calcularse más directamente, observando que dicho segmento une un vértice del icosaedro generador con otro vértice del dodecaedro generado, situado este último punto en el centro de una cara triangular del icosaedro generador. Por consiguiente dicho segmento "a_5" es coincidente con el $\overline{CG}$ de la figura 1.- Refiriéndonos a esta figura, tendremos:

$$a_5 = \overline{CG} = \frac{2}{3}\ \overline{CF} = \frac{2}{3}\sqrt{\overline{CA}^2 - \overline{AF}^2} = \frac{2}{3}\sqrt{(a_{20})^2 - \left(\frac{a_{20}}{2}\right)^2} =$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{1 - \frac{1}{4}}\ a_{20} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{3}{4}}\ a_{20} = \frac{\sqrt{3}}{3}\ a_{20}$$

y sustituyendo a_{20} por su valor (2), será

$$\boxed{a_5} = \frac{\sqrt{3}}{3}\ a_{20} = \frac{\sqrt{3}}{3} \times 2 \times \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\ r_{ec}^{20} = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10} \times \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2}\ r_{ec}^{20} =$$

$$= \sqrt{\frac{(5-\sqrt{5}) \times (4 \times 3)}{10 \times 3^2}}\ r_{ec}^{20} = \sqrt{\frac{(5-\sqrt{5}) \times 2}{5 \times 3}}\ r_{ec}^{20} = \boxed{\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{15}}\ r_{ec}^{20}}$$

Resultado idéntico al de la fórmula (7).

Para la construcción de este modelo, son necesarias las siguientes piezas:

A) ICOSAEDRO REGULAR CONVEXO, DE CARAS VACIADAS



PIEZA Nº 1 CARAS SUPERFICIALES 20 unidades

Iguales a la pieza nº 1 del modelo M-5.102

PIEZA Nº 2 UNIONES ARISTAS 30 unidades

Iguales a la pieza nº 2 del modelo M-5.102

B) DODECAEDRO REGULAR CONVEXO, CONJUGADO, DE CARAS MACIZAS.

PIEZA Nº 3 CARAS SUPERFICIALES 12 unidades

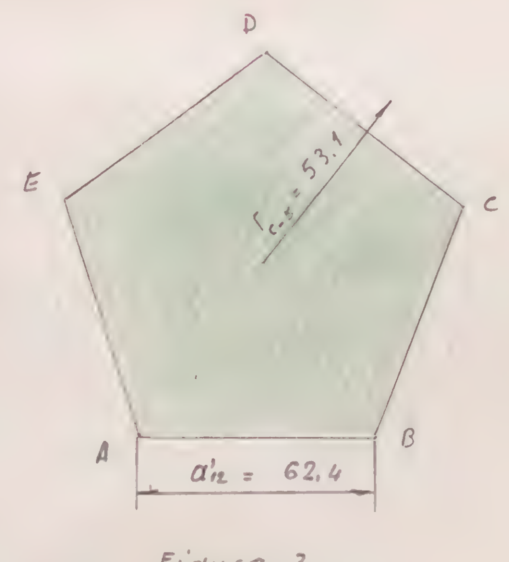


Figura 3

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 3

PIEZA Nº 3 12 (u)

Figura 3

PIEZA Nº 4 REFUERZO NORMAL INTERIOR DE LAS CARAS SUPERFICIALES 12 unidades

Su forma y dimensiones se deducen de las del pentágono ABCDE

UNE A4 210 x 297



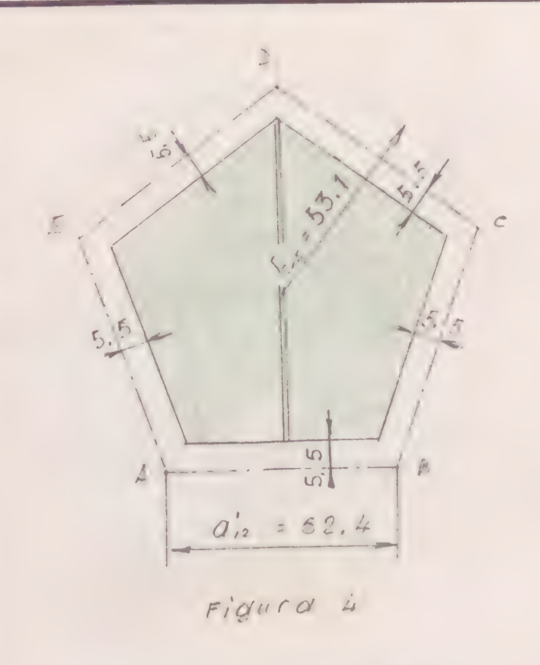


Figura 4

de la figura 3; y se detallan en la figura 2.

PIEZA Nº 4 12 (u)

Figura 4

PIEZA Nº 5 REFUERZO TRANSVERSAL INTERIOR DE LAS CARAS SUPERFICIALES 24 unidades

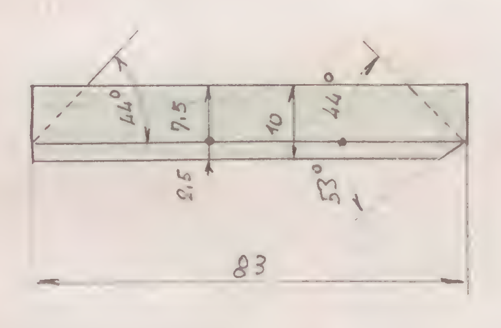


Figura 5

La forma y dimensiones se detallan en la figura 5; su colocación, en la figura A.

PIEZA Nº 5 24 (u)

Figura 5

PIEZA Nº 6 UNIONES ARISTAS 30 unidades

La forma y dimensiones, se detallan en la figura 6

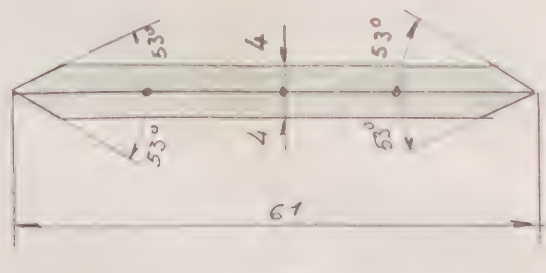


Figura 6

PIEZA Nº 6 30 (u)

Figura 6



		Modelo M-10.2

PIEZA Nº 7 FORRO ROLOREADO 12 unidades

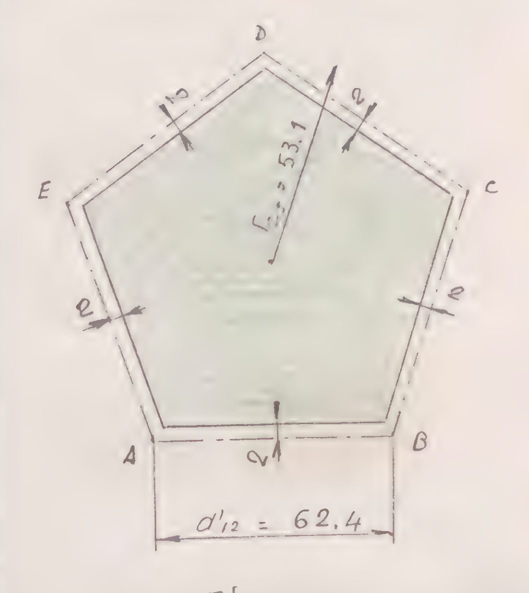


Figura 7

La forma y dimensiones se deducen de las del pentágono ABCDE de la figura 3, y se detallan en la figura 7.

PIEZA Nº 7 12 (u)

Figura 7

---

c) PIRÁMIDES AUXILIARES PENTAGONALES, RECTAS, REGULARES, DE CARAS VACIADAS.

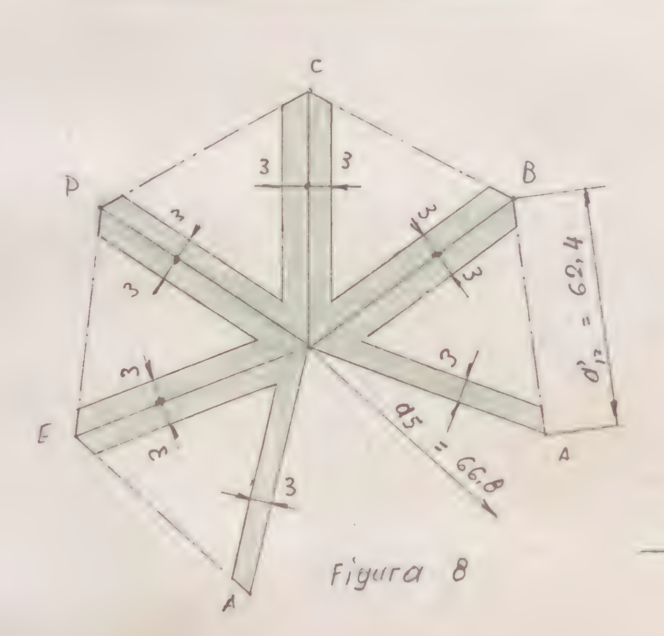


Figura 8

La forma y dimensiones se detallan en la figura 8

PIEZA Nº 8 DESARROLLO LATERAL 12 unidades

Figura 8

PIEZA Nº 9 UNIONES ARISTAS 60 unidades

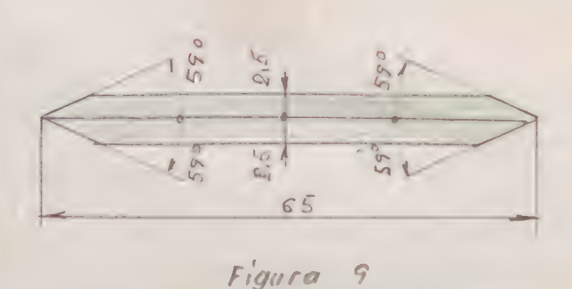


Figura 9

La forma y dimensiones se detallan en la figura 9.

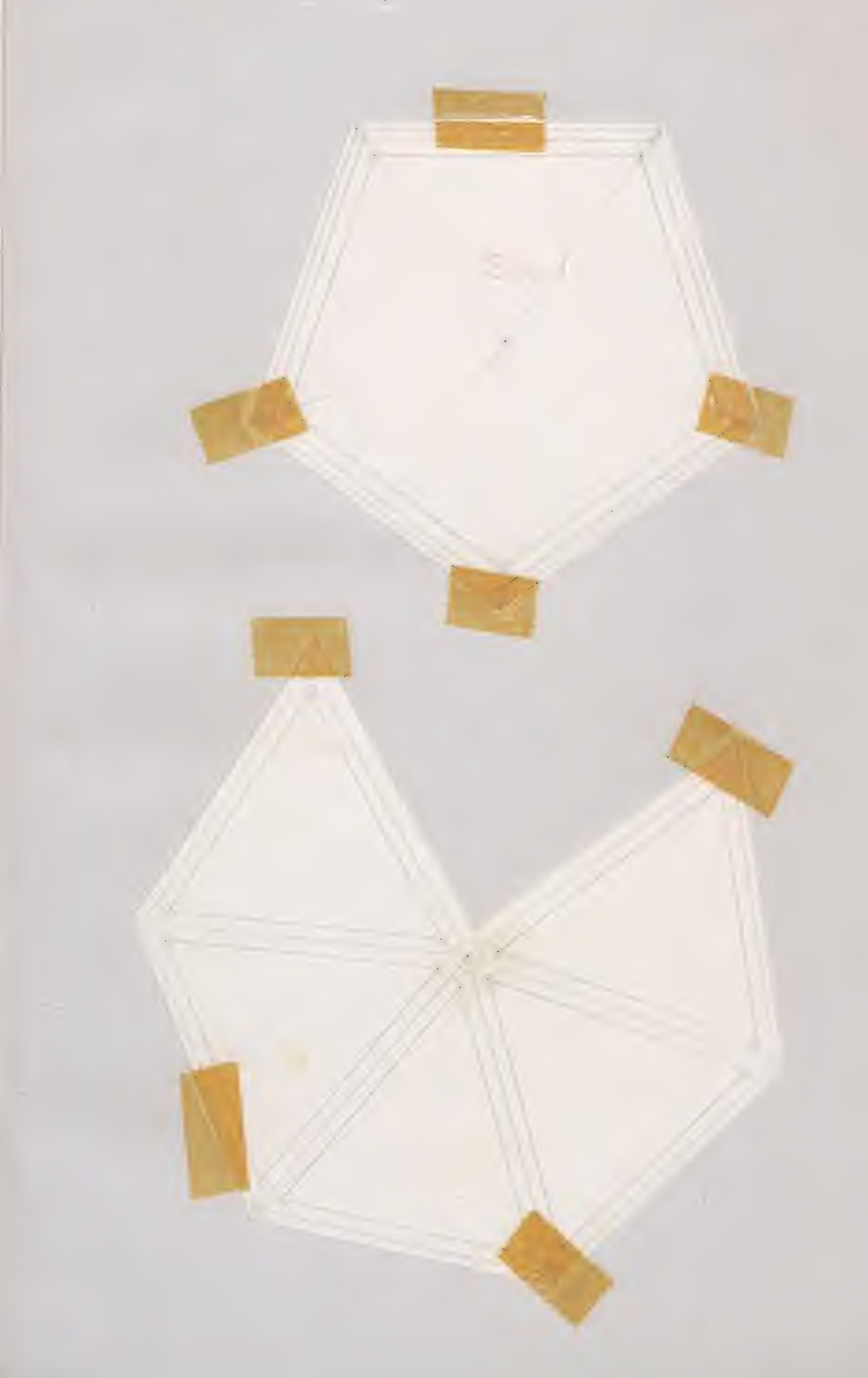
PIEZA Nº 9 60 (u)

Figura 9

Calvario Marzo 1981



MODELO M- 10.2 PATRONES



EJECUCIÓN

MODELO CORPÓREO DE LA "SERIE ALTERNATIVA DE DODECAEDROS E ICOSAEDROS REGULARES CONVEXOS" "P^1_{12}, P^2_{20}, P^3_{12}, P^4_{20}, P^5_{12} ---- $P^n_{20-(12)}$", CONJUGADOS DE UN ICOSAEDRO REGULAR CONVEXO P_{20}, EN LOS CUALES LOS VÉRTICES DE LOS DODECAEDROS ENGENDRADOS P^1_{12}, P^3_{12}, P^5_{12} ..... P^n_{12} (n = 1, 3, 5 ... impar), Y LOS VÉRTICES DE LOS ICOSAEDROS ENGENDRADOS P^2_{20}, P^4_{20}, P^6_{20} --- P^n_{20} (n = 2, 4, 6, --- par), SON LOS CENTROS DE LAS CARAS DEL ANTERIOR.

Radio de la esfera circunscrita al icosaedro P_{20} regular convexo:

$$r^{20}_{ec} = 110 \text{ mm.}$$

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo de la "Serie alternativa de dodecaedros e icosaedros regulares convexos" P^1_{12}, P^2_{20}, P^3_{12}, P^4_{20}, P^5_{12} ---- $P^n_{20-(12)}$, conjugados de un icosaedro regular convexo P_{20}, en los cuales los vértices de los dodecaedros engendrados P^1_{12}, P^3_{12}, P^5_{12} ---- P^n_{12} ($n = 1, 3, 5, 7$ --- impar), y los vértices de los icosaedros engendrados P^2_{20}, P^4_{20}, P^6_{22} ---- P^n_{20} ($n = 2, 4, 6$ ---- par), con los centros de las caras del anterior.

DATO ÚNICO DE ESTE EJERCICIO

r^{20}_{ec} = Radio de la esfera circunscrita al icosaedro P_{20} regular convexo generador:

$$r^{20}_{ec} = 110 \text{ mm}$$

1) GENERALIDADES

Si consideramos un icosaedro "P_{20}" regular convexo, de arista "a_{20}" y unimos los centros "G" de cada cara, con los centros de las dos contiguas que concurren en cada una de sus aristas, se nos formará un dodecaedro regular convexo P^1_{12}, cuyos vértices estarán en los mencionados centros "G" del icosaedro generador "P_{20}". El icosaedro engendrado, será pues "conjugado



Modelo M-10.3

del icosaedro generador P_{20}^{n}:

Si repetimos la operación anterior, uniendo los centros de las caras del dodecaedro P_{12}^{1}, obtenemos un icosaedro regular convexo P_{20}^{2}, de caras paralelas al generador P_{20} y cuyos vértices estarán situados a su vez en los centros G' de las caras del dodecaedro P_{12}^{1}. Así sucesivamente se obtendrán alternadamente los icosaedros P_{20}^{4}, P_{20}^{6} ---- P_{20}^{n} (n = 4, 6, 8--- par) y también los dodecaedros P_{12}^{3}, P_{12}^{5} ---- P_{12}^{n} (n = 3, 5, 7--- impar), que forman en su conjunto la Serie "S" de "n+1" términos.

$$S = P_{20}, \; P_{12}^{1}, \; P_{20}^{2}, \; P_{12}^{3}, \; P_{20}^{4}, \; P_{12}^{5} \; --- \; P_{12-(20)}^{n} \qquad (1)$$

Para valores pares de n "n = 2q" (q = 1, 2, 3, 4---) se obtiene la Serie parcial "S_1" formada exclusivamente por icosaedros de "q+1" términos.

$$S_1 = P_{20}, \; P_{20}^{2}, \; P_{20}^{4}, \; P_{20}^{6} \; ---- \; P_{20}^{2q} \qquad (2)$$

Para valores impares de n "n = 2q+1" (q = 1, 2, 3, 4---) se obtiene a su vez la nueva Serie parcial "S_2", formada exclusivamente por dodecaedros de "q+1" términos:

$$S_2 = P_{12}^{1}, \; P_{12}^{3}, \; P_{12}^{5}, \; P_{12}^{7} \; --- \; P_{12}^{2q+1} \qquad (3)$$

UNE A4 210 x 297

Las series de poliedros (1), (2) y (3) son decrecientes; siendo cualquier poliedro de ellas, menor que el anterior e inscrito en éste.

2) RELACIONES MÉTRICAS

Para la construcción de este modelo, utilizaremos algunas de las fórmulas ya deducidas en anteriores ejercicios.

2.1) Arista "a_{20}" del icosaedro generador P_{20}: (ver fórmula (2) del ejercicio M - 10.2)

$$a_{20} = 2 \times \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\, r_{ec}^{20} \quad b \qquad (4)$$

2.2) Arista "a_{12}^{1}" del dodecaedro conjugado P_{12}^{1}: (Ver fórmula (3) del ejercicio M - 10.2)

$$a_{12}^{1} = \frac{1}{3} \times \sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{5}}\, r_{ec}^{20} \quad b \qquad (5)$$

Al unir los centros de las caras del dodecaedro P_{12}^{1}, obtenemos el icosaedro P_{20}^{2} (Serie 2)

2.3) Radio r_{ec}^{12} de la esfera circunscrita al dodecaedro conjugado P_{12}^{1} y arista a_{12}^{1}.

Su valor se obtiene de la fórmula "$r^{12}_{ec} = \frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{4} a_{12}$" deducida en el ejercicio G.E. nº---- Lámina 4, haciendo en ella $a_{12} = a^1_{12}$ (ver fórmula 5).

$$\boxed{r^{12}_{ec}} = \frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{4} a_{12} = \frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{4} a^1_{12} = \frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{4} \times \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2(5+\sqrt{5})}{5}}\, r^{20}_{ec} =$$

$$= \frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{12} \times \sqrt{\frac{2(5+\sqrt{5})}{5}}\, r^{20}_{ec} = \frac{1}{12}\sqrt{\frac{2(5+\sqrt{5})(\sqrt{15}+\sqrt{3})^2}{5}}\, r^{20}_{ec} =$$

$$= \frac{1}{12}\sqrt{\frac{2(5+\sqrt{5})(15+3+2\sqrt{45})}{5}}\, r^{20}_{ec} = \frac{1}{12} \times \sqrt{\frac{2(5+\sqrt{5})(18+6\sqrt{5})}{5}}\, r^{20}_{ec} =$$

$$= \frac{1}{12} \times \sqrt{\frac{2\times 6 \times (5+\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}{5}}\, r^{20}_{ec} = \sqrt{\frac{12 \times (15+3\sqrt{5}+5\sqrt{5}+5)}{12^2 \times 5}}\, r^{20}_{ec} =$$

$$= \sqrt{\frac{20+8\sqrt{5}}{12 \times 5}}\, r^{20}_{ec} = \boxed{\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\, r^{20}_{ec}} \;; \qquad (6)$$

2.4) Arista "a^2_{20} de icosaedro P^2_{20} conjugado del P^1_{12}.

Se obtiene de la fórmula (8) del ejercicio M-9.2 "$a'_{20} = \frac{\sqrt{15}+5\sqrt{3}}{15} r^{12}_{ec}$" en la que $a'_{20} = a^2_{20}$ y $r^{12}_{ec} = \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\, r^{20}_{ec}$; (ver fórmula (6)). Sustituyendo valores, tendremos:

$$\boxed{a^2_{20}} = \frac{\sqrt{15}+5\sqrt{3}}{15} r^{12}_{ec} = \frac{\sqrt{15}+5\sqrt{3}}{15} \times \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\, r^{20}_{ec} =$$

$$= \frac{1}{15} \times \sqrt{\frac{(5+2\sqrt{5})(\sqrt{15}+5\sqrt{3})^2}{15}}\, r^{20}_{ec} = \frac{1}{15}\sqrt{\frac{(5+2\sqrt{5})(15+75+10\sqrt{45})}{15}}\, r^{20}_{ec} =$$

$$= \frac{1}{15}\sqrt{\frac{(5+2\sqrt{5})(90+30\sqrt{5})}{15}}\; r_{ec}^{20} = \frac{1}{15}\times\sqrt{(5+2\sqrt{5})(6+2\sqrt{5})}\; r_{ec}^{20} =$$

$$= \frac{1}{15}\times\sqrt{2\,(5+2\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}\; r_{ec}^{20} = \frac{1}{15}\times\sqrt{2\,(15+6\sqrt{5}+5\sqrt{5}+10)}\; r_{ec}^{20} =$$

$$= \frac{1}{15}\times\sqrt{2\,(25+11\sqrt{5})}\; r_{ec}^{20} = \boxed{\frac{\sqrt{2\,(25+11\sqrt{5})}}{15}\; r_{ec}^{20}} \qquad (7)$$

Los icosaedros regulares P_{20} y P^2_{20} (Serie 2), son semejantes, siendo "$\frac{a^2_{20}}{a_{20}}$" la razón de semejanza de sus aristas homólogas. Sustituyendo los valores de "a_{20}" (4) y (a^2_{20}) (7), tendremos:

$$\boxed{\frac{a^2_{20}}{a_{20}}} = \frac{\sqrt{2\,(25+11\sqrt{5})}}{15}\; r_{ec}^{20} : 2\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\; r_{ec}^{20} = \frac{\sqrt{2\,(25+11\sqrt{5})}}{15} : 2\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2\,(25+11\sqrt{5})}}{2\times 15\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}} = \frac{1}{30}\sqrt{\frac{2\,(25+11\sqrt{5})}{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}} = \frac{1}{30}\sqrt{\frac{20\,(25+11\sqrt{5})}{5-\sqrt{5}}} =$$

$$= \frac{1}{30}\sqrt{\frac{20\,(25+11\sqrt{5})(5+\sqrt{5})}{20}} = \frac{1}{30}\sqrt{(25+11\sqrt{5})(5+\sqrt{5})} =$$

$$= \frac{1}{30}\sqrt{125+55\sqrt{5}+25\sqrt{5}+55} = \frac{1}{30}\sqrt{180+80\sqrt{5}} = \frac{1}{3}\sqrt{20\,(9+4\sqrt{5})} =$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{\frac{20\,(9+4\sqrt{5})}{100}} = \boxed{\frac{1}{3}\sqrt{\frac{9+4\sqrt{5}}{5}}} \qquad (8)$$

NOTA: Obsérvese que esta razón de semejanza es la misma que la del ejercicio M-9.3 (fórmula 8).



Modelo M-10.3

Por las magnitudes a) fórmula (4); b) fórmula (5) y c) fórmula (7), podemos construir este modelo M-10.3, que limitamos a los siguientes poliedros:

1º) Icosaedro generador "P_{20}" de caras vaciadas.

2º) Dodecaedro conjugado "P^1_{12}" del icosaedro "P_{20}", de caras vaciadas, con sus correspondientes pirámides pentagonales para fijación de los vértices del "P_{20}".

3º) Icosaedro "P^2_{20}" conjugado del dodecaedro "P^1_{12}" de caras macizas, con sus correspondientes pirámides triangulares para fijación de los vértices del "P^1_{12}"

Análogamente a lo expuesto en el ejercicio M-7.3, supongamos ahora que el icosaedro "P^2_{20}", es a su vez generador del dodecaedro "P^3_{12} (Serie (3) y conjugado del "P^2_{20}") y del icosaedro "P^4_{20}" (Serie (2), conjugado del "P^3_{12}"). El modelo formado por los poliedros P^2_{20}, P^3_{12} y P^4_{20} sería semejante al que estudiamos (modelo M-10.3), aun cuando de menor tamaño, siendo la razón de semejanza la de "$\frac{1}{3}\sqrt{\frac{9+4\sqrt{5}}{5}} < 1$" (ver fórmula (8)), menor que la unidad.

Esta propiedad nos permite calcular fácilmente las dimensiones lineales de los poliedros P^2_{20}, P^3_{12}, P^4_{20}, bastando pues multiplicar por la razón de semejanza "$k = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{9+4\sqrt{5}}{5}} = 0{,}63\ 14\ 75\ 73\ 0 \ldots < 1$" las respectivas magnitudes lineales homólogas de los poliedros P_{20}, P^1_{12}, P^2_{20}.

En la determinación de las superficies se empleará la razón

Tavares Noviembre 1981

		Modelo M-10.3

$\left(\frac{1}{3}\sqrt{\frac{9+4\sqrt{5}}{5}}\right)^2$, y en la de volúmenes, la razón

$\left(\frac{1}{3}\sqrt{\frac{9+4\sqrt{5}}{5}}\right)^3$

Como consecuencia de lo expuesto anteriormente, deducimos que las magnitudes lineales de los poliedros de la Serie (2) forman una progresión geométrica indefinida, cuyo primer término son las del icosaedro generador "P_{20}", y su razón $\frac{1}{3}\sqrt{\frac{9+4\sqrt{5}}{5}} < 1$.

Las lineales de la Serie (3) forman igualmente otra progresión geométrica indefinida cuyo primer término son las del dodecaedro "P'_{12}" conjugado del icosaedro generador "P_{20}" y deducidas independiente de las de éste, siendo su razón también la de $\frac{1}{3}\sqrt{\frac{9+4\sqrt{5}}{5}} < 1$.

Las magnitudes superficiales (áreas) o volumétricas de las Serie (2) y (3), forman análogamente progresiones geométricas indefinidas de razones $\left(\frac{1}{3}\sqrt{\frac{9+4\sqrt{5}}{5}}\right)^2 < 1$ y $\left(\frac{1}{3}\sqrt{\frac{9+4\sqrt{5}}{5}}\right)^3 < 1$ respectivamente.

Finalmente haremos observar que todas las progresiones geométricas indefinidas descritas anteriormente, la suma de sus infinitos términos es finita por ser su razón menor que la unidad. Dicha suma se obtiene por la fórmula

$$\Sigma = \frac{a}{1-r}$$

en la que "a" es el valor numérico de su primer término, y "$r < 1$" es la razón geométrica correspondiente.

Tavares Noviembre 1981

UNE A4 210 x 297



Modelo M-10.3

3) CONSTRUCCIÓN DEL MODELO PROPUESTO

3 A) ICOSAEDRO GENERADOR "P_{20}" REGULAR CONVEXO, DE CARAS VACIADAS.

Su arista se deduce de la fórmula (4) de este ejercicio:

$$\boxed{a_{20}} = 2\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\; r_{ec}^{20} \cong 1,05\ 14\ 62\ 22\ 4\ldots \times 110 \cong \boxed{115,7 \text{ mm}}$$

PIEZA Nº 1 CARAS SUPERFICIALES TRIANGULARES EQUILÁTERAS 20 unidades

Iguales a la pieza nº 1 del modelo M-5.102

PIEZA Nº 2 UNIONES ARISTAS 30 unidades

Iguales a la pieza nº 2 del modelo M-5.102

3 B) DODECAEDRO REGULAR CONVEXO "P^1_{12}" CONJUGADO DEL ICOSAEDRO "P_{20}", DE CARAS VACIADAS

Su arista "a^1_{12}" se deduce de la fórmula (5) de este ejercicio

$$\boxed{a^1_{12}} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{5}}\; r_{ec}^{20} = 0,56\ 71\ 00\ 53\ 9\ldots \times 110 \cong \boxed{62,4 \text{ mm}}$$

PIEZA Nº 3 CARAS SUPERFICIALES PENTAGONALES 12 unidades

UNE A4 210 x 297

Alvarez Noviembre 1981



Su forma y dimensiones se detallan en la figura 1.

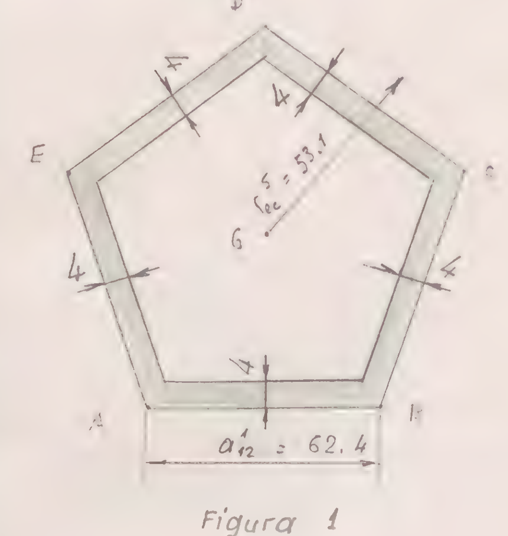


Figura 1

$r_{6c}^{5} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} \times l_5 \simeq 0{,}85065 \times 62{,}4 \simeq 53{,}1$ mm

PIEZA Nº 3

12 (u)

Figura 1

PIEZA Nº 4 UNIONES ARISTAS 30 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 2

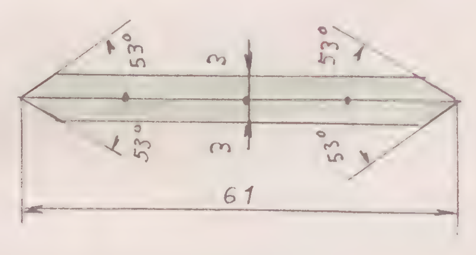


Figura 2

PIEZA Nº 4 30 (u)

Figura 2

3C) PIRÁMIDES AUXILIARES DE CARAS VACIADAS, RECTAS Y PENTAGONALES, PARA FIJACIÓN DE LOS VÉRTICES DEL ICOSAEDRO REGULAR "P_{20}" A LAS CARAS DEL DODECAEDRO REGULAR "P_{12}^{1}".

La arista lateral "a_5" de estas pirámides auxiliares, se obtiene de la fórmula "$a_5 = \sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{15}}\, r_{ec}^{20}$" (Ver fórmula (7) del ejercicio M-10.2).- La longitud de la base de dichas pirámides es la de la arista "a_{12}^{1}" del dodecaedro conjugado "P_{20}^{1}" (Ver fórmula (5) de este ejercicio). Por consiguiente, será:

UNE A4:210 x 297

$$\boxed{a_5} = \sqrt{\frac{10 - 2\sqrt{5}}{15}}\; r_{ec}^{20} \cong 0.60\ 70\ 61\ 99\ 8 \ldots \times 110 \cong \boxed{66.8 \text{ mm}}$$

PIEZA Nº 5 DESARROLLO DE LAS PIRÁMIDES AUXILIARES 3 C)

12 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 3

$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE} = \overline{EA} = 62{,}4$ mm

PIEZA Nº 5 12 (u)

Figura 3

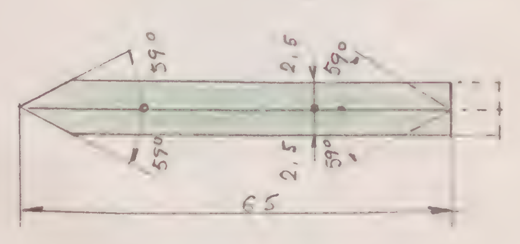
$a^1_{12} = 62{,}4$; $a_5 = 66{,}8$

Figura 3

NOTA : La figura 3 es igual a la figura 8 del ejercicio M-10.2.

PIEZA Nº 6 UNIONES ARISTAS 60 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 4



PIEZA Nº 6 60 (u)

Figura 4

Figura 4

---

3 D) ICOSAEDRO " P^2_{20} " CONJUGADO DEL DODECAEDRO " P^1_{12} " REGULAR CONVEXO, DE CARAS MACIZAS.

UNE A4 210 x 297



La arista "a^2_{20}" se deduce de la fórmula (7) de este ejercicio:

$$\boxed{a^2_{20}} = \frac{\sqrt{2(25+11\sqrt{5})}}{15} r_{ec}^{20} \cong 0,66\ 39\ 72\ 87\ 6 \ldots \times 110 = \boxed{73,0 \ mm}$$

PIEZA Nº 7 — CARAS SUPERFICIALES TRIANGULARES REGULARES — 20 unidades

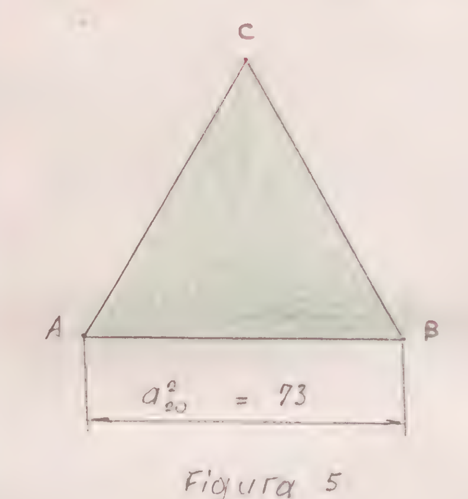


Figura 5

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 5

PIEZA Nº 7 — 20 (u)

Figura 5

PIEZA Nº 8 — REFUERZO NORMAL INTERIOR DE LAS CARAS SUPERFICIALES — 20 unidades

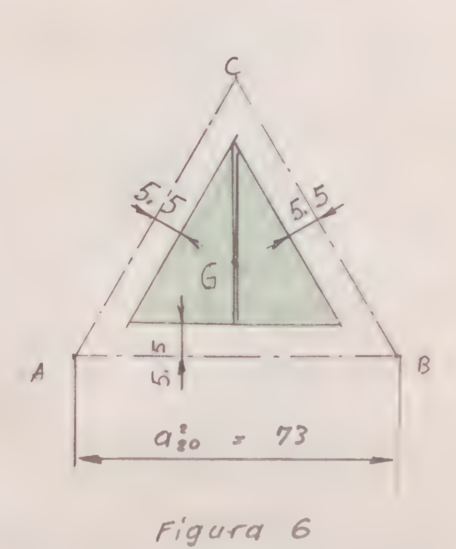


Figura 6

Su forma y dimensiones se deducen de las del triángulo ABC de la figura 5, y se detallan en la figura 6.

PIEZA Nº 8 — 20 (u)

Figura 6

PIEZA Nº 9 — REFUERZO TRANSVERSAL INTERIOR DE LAS CARAS SUPERFICIALES — 40 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 7; su

		Modelo M - 10,3

colocación, en la figura 6.

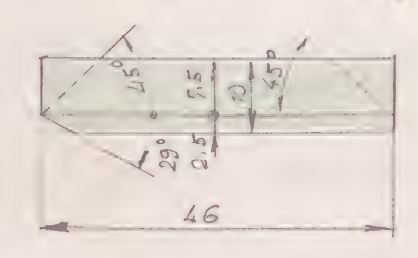


Figura 7

PIEZA Nº 9 40 (u)

Figura 7

PIEZA Nº 10 UNIONES ARISTAS 30 unidades

La forma y dimensiones se detallan en la figura 8

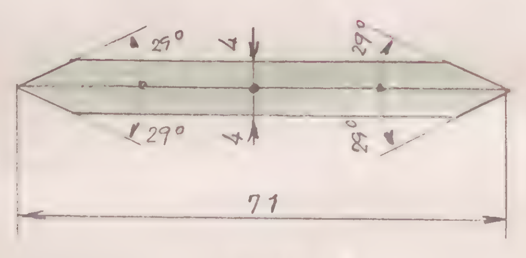


Figura 8

PIEZA Nº 10 30 (u)

Figura 8

PIEZA Nº 11 FORRO COLOREADO 20 unidades

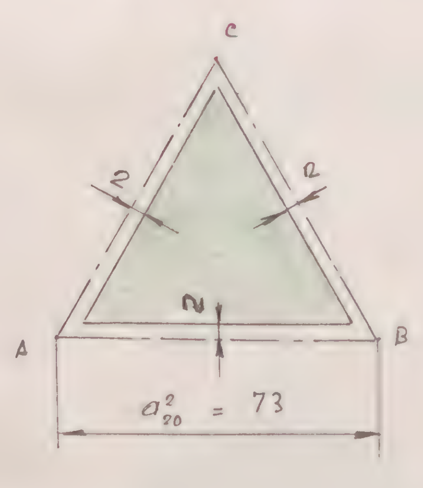


Figura 9

La forma y dimensiones se deducen de las del triángulo ABC de la figura 5, y se detallan en la figura 9

PIEZA Nº 11 20 (u)

Figura 8

3E) PIRÁMIDES AUXILIARES DE CARAS VACIADAS, RECTAS Y TRIANGULARES, PARA FIJACIÓN DE LOS VÉRTICES DEL DODECAEDRO REGULAR "P^1_{12}" A LAS CARAS DEL ICOSAEDRO "P^2_{20}".

Noviembre 1981



Para obtener el desarrollo lateral de estas pirámides auxiliares, es preciso conocer previamente las siguientes magnitudes:

3E.1) Longitud "a_{20}^{2}" de la arista de la base triangular.

3E.2) Longitud "a_{3}^{2}" de la arista lateral.

3E.1) La longitud de la base, es igual a la de la arista "a_{20}^{2}" del icosaedro "P_{20}^{2}", ya calculada en este ejercicio (ver fórmula 7). Su valor numérico es:

$$\boxed{a_{20}^{2}} = \sqrt{\frac{2\,(25+11\sqrt{5})}{15}}\; r_{ec}^{20} \cong 0{,}66\,39\,72\,87\,6\ldots \times 110 \equiv \boxed{73{,}0 \text{ mm}}$$

3E.2) La longitud de la arista lateral "a_{3}^{2}" de la pirámide auxiliar triangular, se obtiene teniendo en cuenta que uno de sus extremos es coincidente con un vértice del dodecaedro "P_{12}^{1}", y el otro extremo está situado en el centro G' de una cara del mismo. (por ser P_{20}^{2} conjugado del P_{12}^{1}). En la figura 10, se representa una cara ABCDE del dodecaedro regular P_{12}^{1} y su baricentro G', en la que el segmento $\overline{DG'}$ es el buscado "$a_{3}^{2} = r_{cc}^{5}$".

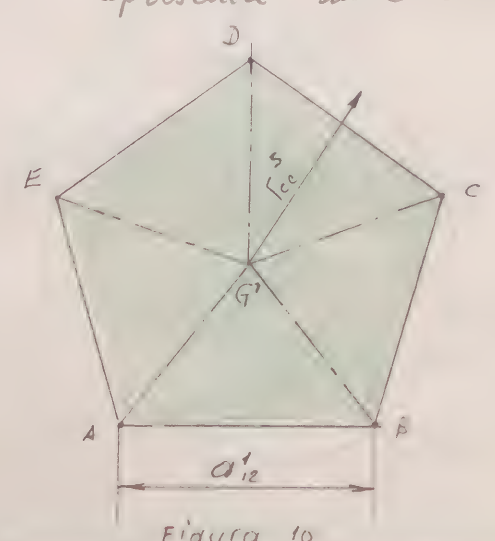


Figura 10

Por consiguiente, tendremos:

$$\boxed{a_{3}^{2} = r_{cc}^{5} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\; l_5}$$ (ver fór-

Modelo M - 10.3

...mula (3) del ejercicio G.P. 1.400-44.] y también:

$$a_{12}^{1} = \ell_5 \times \frac{1}{3} \times \sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{5}}\, r_{ec}^{20}$$

(ver fórmula (5) de este ejercicio). Sustituyendo valores, tendremos:

$$\boxed{a_3^2} = r_{cc}^{5} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\,\ell_5 = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} \times \frac{1}{3}\sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{5}}\, r_{ec}^{20} =$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{\frac{(5+\sqrt{5})\,(5+\sqrt{5}) \times 2}{50}}\, r_{ec}^{20} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{(5+\sqrt{5})^2}{25}}\, r_{ec}^{20} = \boxed{\frac{5+\sqrt{5}}{15}\, r_{ec}^{20}}$$

Su valor numérico es:

$$\boxed{a_3^2} = \frac{5+\sqrt{5}}{15} \times 110 \cong 0,48\ 24\ 04\ 53\ 2\ldots \cong \boxed{53,1\ \text{mm}}$$

PIEZA Nº 12 DESARROLLO LATERAL DE LAS PIRÁMIDES AUXILIARES TRIANGULARES, RECTAS, REGULARES, DE CARAS VACIADAS, PARA FIJACIÓN DE LOS VÉRTICES DEL DODECAEDRO "P_{12}^{1}" A LAS CARAS ICOSAEDRO "P_{20}^{2}" — 20 unidades

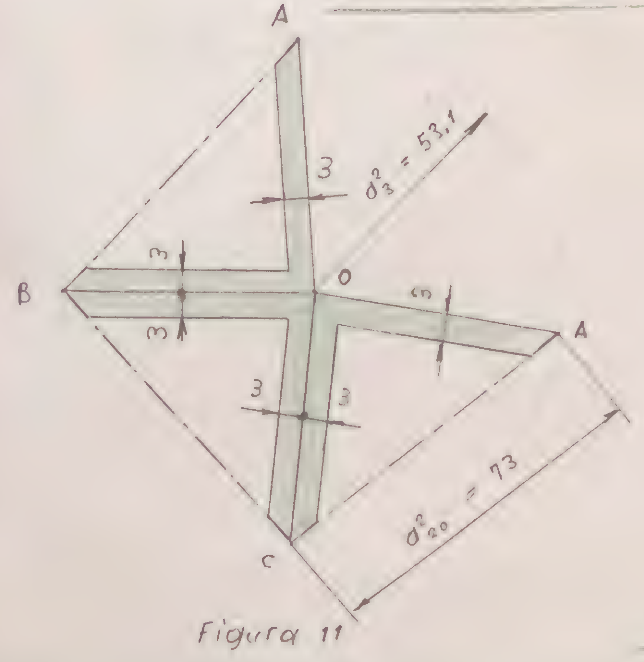


Figura 11

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 11.

$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA} = 73$ mm

PIEZA Nº 12 — 20 (u)

Figura 11

NOTA.- La figura 11 es semejante a la figura 6 del modelo M-9.2.

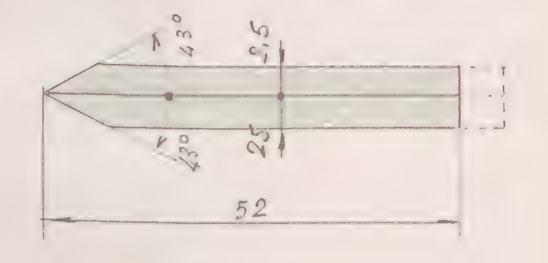
UNE A4 210 x 297

Calvarez — Noviembre 1981

Modelo M - 10.3

PIEZA Nº 13 UNIONES ARISTAS 60 unidades

La forma y dimensiones se detallan en la figura 12



PIEZA Nº 13 60 (U)

Figura 12

Figura 12

UNE A4 210 x 297



MODELO M - 10.3
Patrones

	MODELOS CORPÓREOS	Modelo M - 12.1

POLIEDRO CÓNCAVO FORMADO POR LA INTERSECCIÓN DE DOS TETRAEDROS REGULARES CONVEXOS, CONJUGADOS POR SUS ARISTAS.

Radio de la esfera circunscrita

$r' = 110$ mm.

UNE A 4-210 x 297

	[illegible] de construcción de poliedros MODELOS CORPÓREOS	Modelo M - 12.1

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo del poliedro cóncavo obtenido por la intersección de dos tetraedros regulares convexos, conjugados por sus aristas.

El tetraedro conjugado por las aristas de otro tetraedro regular convexo, se obtiene al trazar por los puntos medios de las aristas del tetraedro dado, rectas perpendiculares al plano "π" determinado por cada una de las aristas del dado y el centro "O" de su esfera circunscrita.

Éstas perpendiculares se cortan tres a tres en puntos que son los vértices de otro tetraedro regular convexo, igual al dado y que se denomina "conjugado por las aristas", las cuales a más de ser perpendiculares, se cortan en sus respectivos puntos medios.

El modelo M - 12.1, que estudiamos ahora, está formado por dos tetraedros regulares convexos iguales, conjugados por sus aristas y de caras macizas, con centro "O" común.

DATO: Radio "r'" de la esfera circunscrita a los dos tetraedros:

$$r' = 110 \text{ mm}$$

Este poliedro ha sido estudiado en el ejercicio G.E. y representado en la lámina 12.

UNE A 4-210 x 297

[illegible] Diciembre 1978

La longitud de la arista de los dos tetraedros conjugados iguales se deduce de la fórmula nº (3) del ejercicio G.E. , en la que se relaciona el radio r_{ec}^{4} de la esfera circunscrita con la arista a_4 del tetraedro regular convexo inscrito en la misma, o sea:

$$r_{ec}^{4} = r' = 110 = \frac{\sqrt{6}}{4} a_4 \quad ; \quad \text{de donde} \quad \boxed{a_4} = r' \times \frac{4}{\sqrt{6}} =$$

$$= r' \times \frac{4\sqrt{6}}{6} = \frac{2\sqrt{6}}{3} \times 110 \cong 1.63\ 29\ 93\ 16\ 2 \ldots \times 110 \cong$$

$$\boxed{= 179,6 \ \text{m. m.}}$$

Para la construcción de este modelo se precisan las siguientes piezas:

---

1) TETRAEDRO REGULAR CONVEXO DADO, DE ARISTA

$a_4 = 179,6$ m m.

Este tetraedro se compone de las siguientes piezas:

UNE A 4-210 x 297



PIEZA Nº 1 CARAS SUPERFICIALES 4 unidades

Son (fig. 1) triángulos equiláteros de lado $l_3 = a_4 = 179.6$ mm

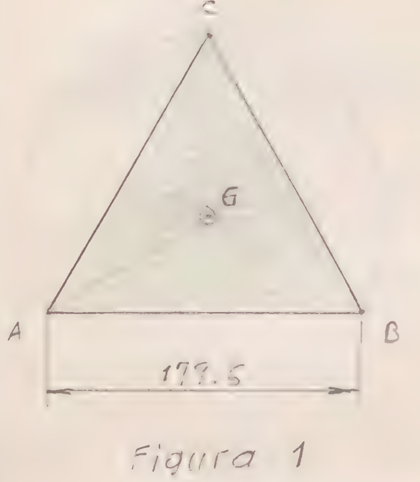


Figura 1

PIEZA Nº 1 4 unidades

Figura 1

PIEZA Nº 2 REFUERZO NORMAL DE LAS CARAS SUPERFICIALES 4 unidades

Su forma y dimensiones se representan en la figura 2 y se deducen de las del triángulo ABC de la figura 1.

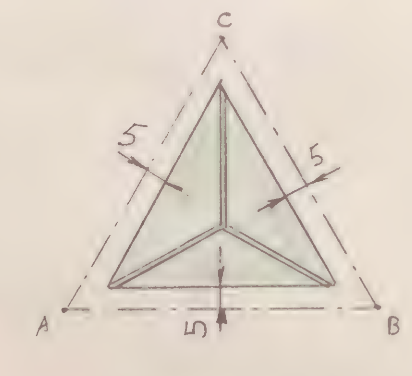


Figura 2

PIEZA Nº 2 4 (U)

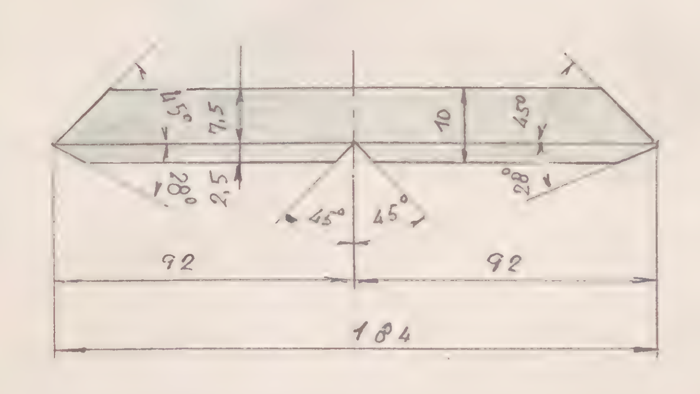
Fig. 2

PIEZA Nº 3 REFUERZO TRANSVERSAL DE LAS CARAS SUPERFICIALES 12 unidades

Se colocan en la dirección de las bisectrices del triángulo de las caras



superficiales (fig. 2) y su forma y dimensiones se detallan en la figura 3.



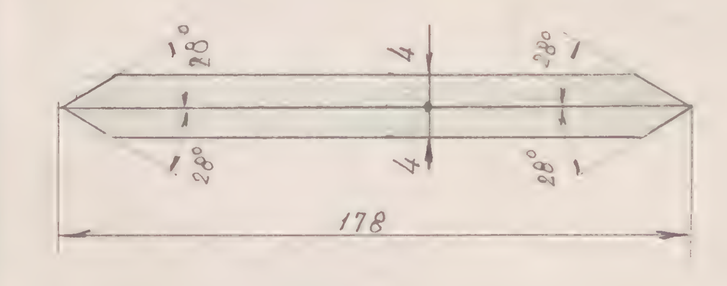
PIEZA Nº 3 12 (u) (simétricas 2 a 2)

Fig. 3

Figura 3

PIEZA Nº 4 UNIONES ARISTAS 6 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 4



PIEZA Nº 4 6 (u)

Fig. 4

Figura 4

PIEZA Nº 5 FORRO COLOREADO EN ZONAS VISTAS DE LAS CARAS LATERALES Y PIRÁMIDES APARENTES 24 unidades (12 de un color y 12 de otro)

Su forma y dimensiones se representan en la figura 5, y se deducen de las del triángulo ABC de lado mitad de la arista ($l_3 = \frac{179,6}{2} = 89,8$ mm.)



		Modelo M- 12.1

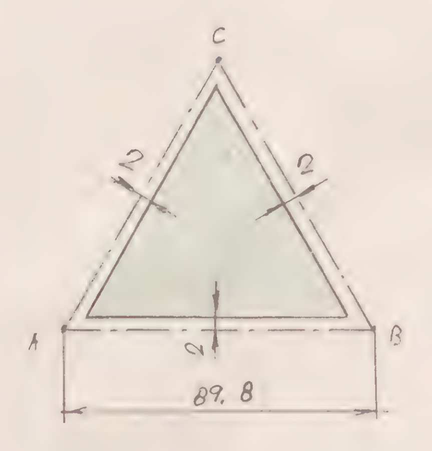


Figura 5

PIEZA Nº 5 — 12 (u) de un color / 12 (u) de otro

Fig. 5

2) TETRAEDRO REGULAR CONJUGADO INSCRITO EN LA MISMA ESPERA QUE EL TETRAEDRO 1), DE ARISTA $a_4 = 179{,}6$ mm

En el modelo, solo aparece de este tetraedro conjugado, cuatro pirámides de tres caras triangulares y equiláteras, cuyo lado es $l_3 = 89{,}8$ mm. mitad de la longitud de su arista.

Para la construcción de estas pirámides se precisan las siguientes piezas:

PIEZA Nº 6 — CARAS LATERALES DE LAS PIRÁMIDES APARENTES — 12 unidades

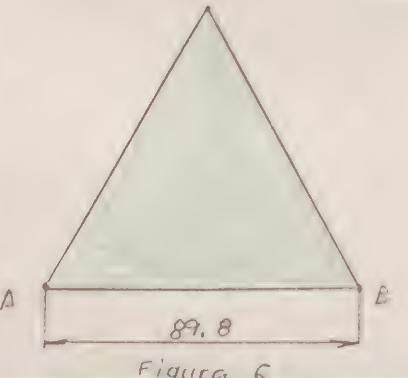


Figura 6

Son (fig. 6) triángulos equiláteros de lado $l_3 = 89.8$ mm.

PIEZA Nº 6 — 12 (u)

Fig. 6



PIEZA Nº 7 — REFUERZO NORMAL DE LAS CARAS LATERALES DE LAS PIRÁMIDES APARENTES — 12 unidades

Su forma y dimensiones se representan en la figura 7, y se deducen del triángulo ABC de la figura 6

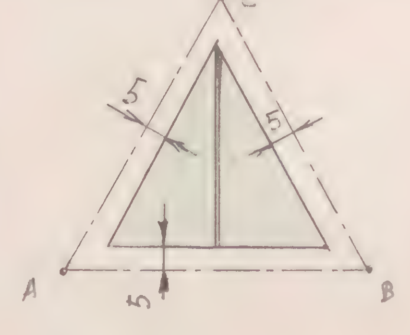


Figura 7

PIEZA Nº 7 — 12 (U)

Fig. 7

PIEZA Nº 8 — REFUERZO TRANSVERSAL DE LAS CARAS LATERALES DE LAS PIRÁMIDES APARENTES — 24 unidades

Se colocan en la dirección indicada en la fig. 7 y su forma y dimensiones se detallan en la figura 8.

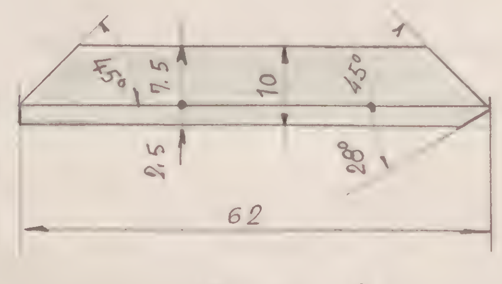


Figura 8

PIEZA Nº 8 — 24 (U)

Fig. 8

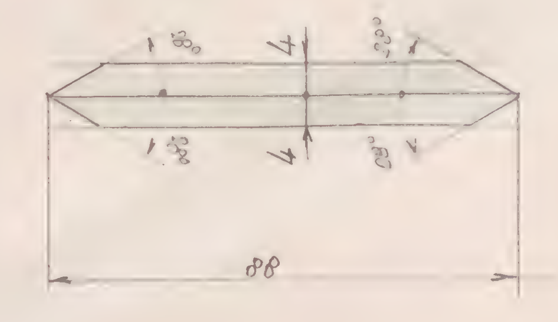
PIEZA Nº 9 — UNIONES ARISTAS DE LAS CARAS LATERALES DE LAS PIRÁMIDES APARENTES

24 unidades

UNE A 4-210 x 297



Su forma y dimensiones se detallan en la figura 9.



PIEZA Nº 9 24 (u)

Fig. 9

Figura 9

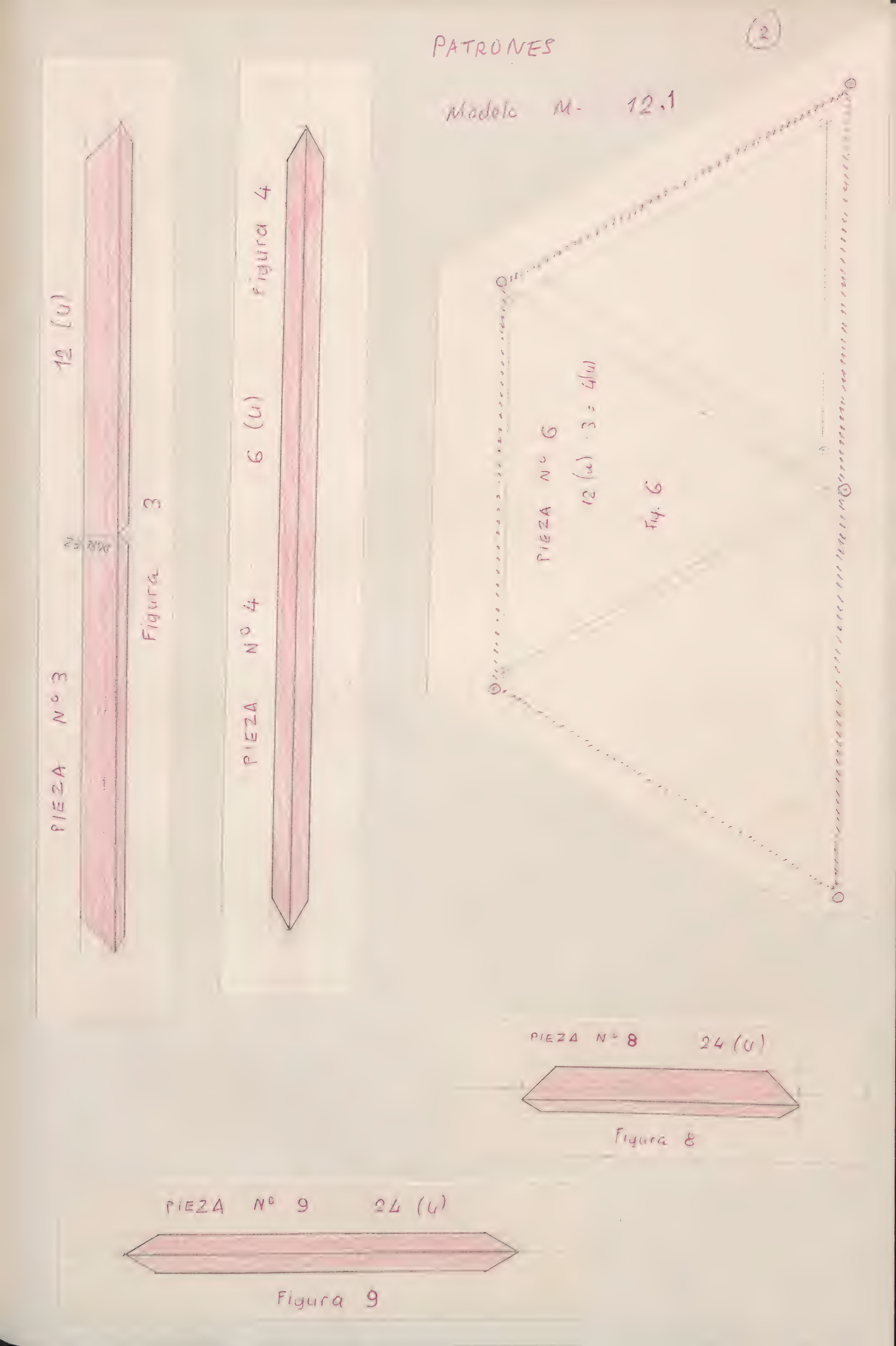


PIEZA Nº 5
FORRO COLOREADO
12 (u) de un color
12 (u) de otro
24 (u)
Fig. 5

PIEZA Nº 1
4 (u)
Fig. 1

PIEZA Nº 2
4 (u)
Fig. 2

PIEZA Nº 7
12 (u)
Fig. 7



PATRONES
2
Modelo M- 12.1
PIEZA Nº 3 12 (u)
Figura 3
PIEZA Nº 4 6 (u)
Figura 4
PIEZA Nº 6
12 (u) 3 = 4(u)
Fig. 6
PIEZA Nº 8 24 (u)
Figura 8
PIEZA Nº 9 24 (u)
Figura 9

Variante del modelo M-12.1

POLIEDRO CÓNCAVO FORMADO POR LA INTERSECCIÓN DE DOS TETRAEDROS REGULARES CONVEXOS, CONJUGADOS POR SUS ARISTAS.

Radio de la esfera circunscrita:

$r' = 76.1$ mm.

UNE A 4-210 x 297

ENUNCIADO: Construcción del modelo corpóreo del poliedro cóncavo obtenido por la intersección de dos tetraedros regulares convexos, conjugados por sus aristas.

Variante del modelo M-12.1

El modelo que se estudia tiene las mismas características que el estudiado en el modelo M-12.1, y varía tan sólo en el radio de la esfera circunscrita a los mismos que es de 76.1 mm en el actual y en el M-12.1 era de 110 mm, siendo por consiguiente el estudiado actualmente de menor tamaño que el estudiado en el M-12.1.

El factor lineal o escala de reducción será pues:

$$\boxed{E} = \frac{76.1}{110} = 0{,}69\widehat{18}\ldots \simeq \boxed{0{,}69\,18} \qquad (1)$$

que aplicaremos en el cálculo de las magnitudes lineales del presente modelo. Así pues, la arista a_4 de los dos tetraedros regulares convexos conjugados, será:

$$\boxed{a_4} = 179{,}6 \times 0{,}69\,18 \simeq \boxed{124{,}3 \text{ mm}} \quad y$$

$$\boxed{\frac{a_4}{2}} = \frac{124{,}3}{2} = \boxed{62{,}2 \text{ mm}}$$

Para la construcción de este modelo se precisan las siguientes piezas:

UNE A 4-210 x 297

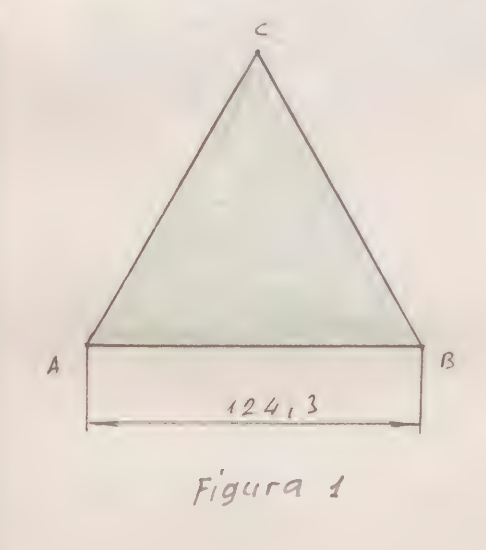


1) TETRAEDRO REGULAR CONVEXO DADO, DE ARISTA

a_4 = 124,3 mm

PIEZA Nº 1 CARAS SUPERFICIALES 4 unidades

Son triángulos equiláteros y su forma y dimensiones se detallan en la figura 1



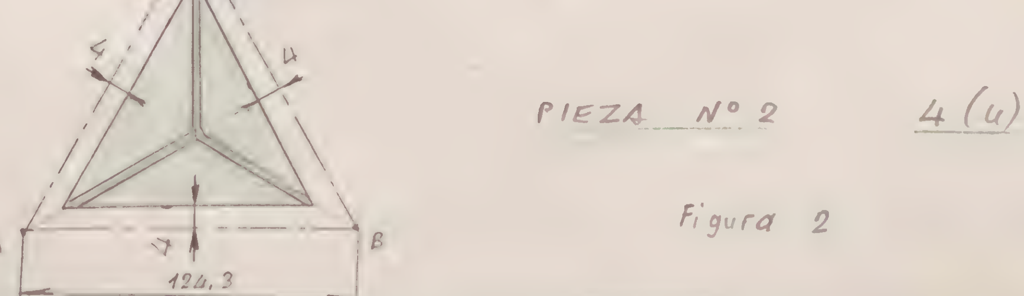
PIEZA Nº 1 4 (U)

Figura 1

Figura 1

PIEZA Nº 2 REFUERZO NORMAL DE LAS CARAS SUPERFICIALES 4 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 2, y se deducen de las del triángulo ABC de la figura 1



PIEZA Nº 2 4 (u)

Figura 2

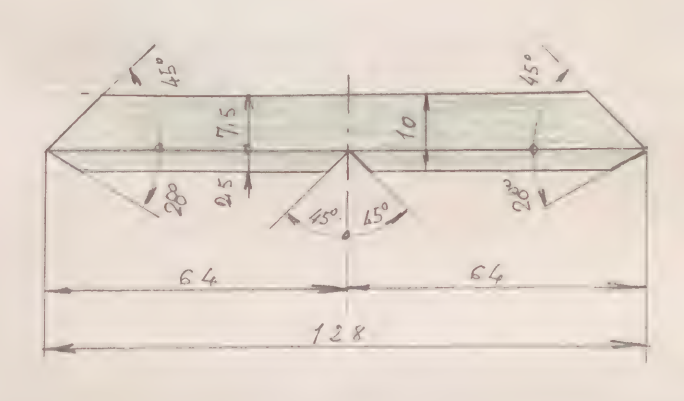
Figura 2

UNE A 4-210 x 297



PIEZA Nº 3 REFUERZO TRANSVERSAL DE LAS CARAS SUPERFICIALES 12 unidades

Se colocan en la dirección de las bisectrices del triángulo de las caras superficiales (fig. 2), y su forma y dimensiones se detallan en la figura 3.



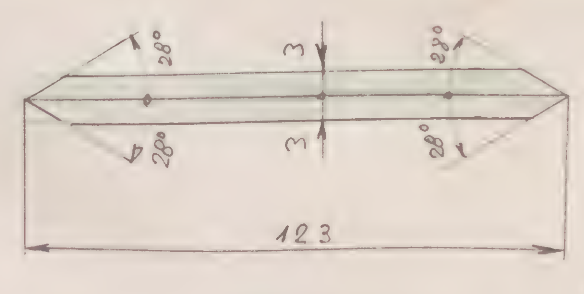
PIEZA Nº 3 12 (u) (simétricas 2 a 2)

Figura 3

Figura 3

PIEZA Nº 4 UNIONES ARISTAS 6 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 4



PIEZA Nº 4 6 (u)

Figura 4

Figura 4

PIEZA Nº 5 FORRO COLOREADO EN ZONAS VISTAS DE LAS CARAS LATERALES Y PIRÁMIDES APARENTES 24 unidades (12 de un color y 12 de otro)

UNE A 4-210 x 297

Febrero 1979



Su forma y dimensiones se representan en la figura 5, y se deducen de las del triángulo ABC de lados mitad de la arista ($l_3 = \frac{124.3}{2} = 62.2$ mm)

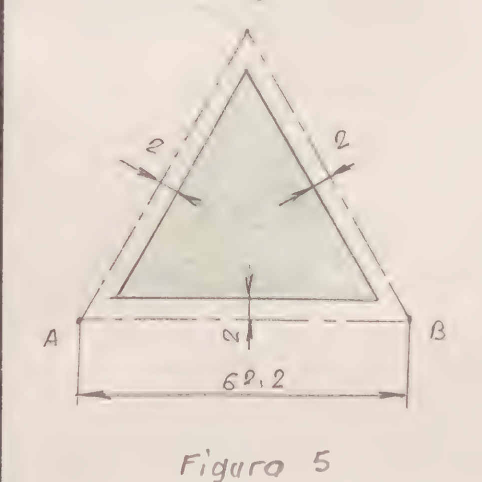


Figura 5

PIEZA Nº 5 24 (u)

Figura 5

2) TETRAEDRO REGULAR CONJUGADO, INSCRITO EN LA MISMA ESFERA QUE EL TETRAEDRO 1), DE ARISTA $a_4 = 124.3$ mm

En el modelo, sólo aparece de este tetraedro conjugado, cuatro pirámides de tres caras triangulares y equiláteras, cuyo lado es $l_3 = 62.2$ mm, mitad de la longitud de su arista. Para la construcción de estas pirámides se precisan las siguientes piezas:

PIEZA Nº 6 CARAS LATERALES DE LAS PIRÁMIDES APARENTES 12 unidades

Son (figura 6) triángulos equiláteros de lado

$$l_3 = 62.2 \text{ mm}$$

UNE A 4-210 x 297



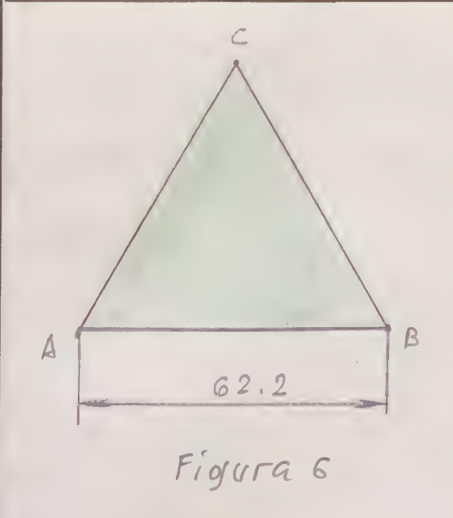


Figura 6

PIEZA Nº 6 12 (u)

Figura 6

PIEZA Nº 7 REFUERZO NORMAL DE LAS CARAS LATERALES DE LAS PIRÁMIDES APARENTES 12 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 7, y se deducen de las del Triángulo ABC de la figura 6

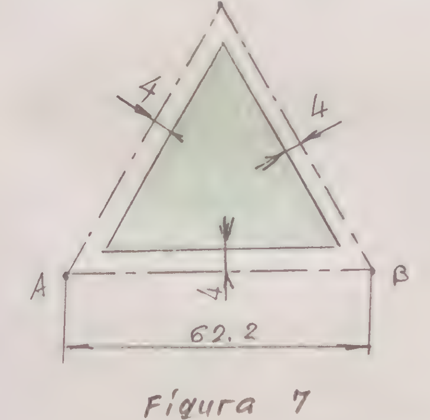


Figura 7

PIEZA Nº 7 12 (u)

Figura 7

PIEZA Nº 8 UNIONES ARISTAS DE LAS CARAS LATERALES DE LAS PIRÁMIDES APARENTES 24 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 8

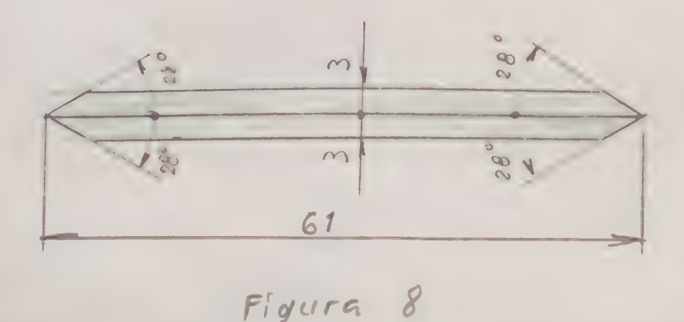


Figura 8

PIEZA Nº8 24 (u)

Figura 8

UNE A 4-210 x 297

[signature] Febrero 1979

Variante del modelo M-12.2

POLIEDRO CÓNCAVO FORMADO POR LA INTERSECCIÓN DE DOS TETRAEDROS REGULARES CONVEXOS, CONJUGADOS POR SUS ARISTAS.

Radio de la esfera circunscrita:

r' = 76,1 mm.

Variante del modelo M- 12.2

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo del poliedro cóncavo obtenido por la intersección de dos tetraedros regulares convexos, conjugados por sus aristas.

El modelo que se estudia puede considerarse como una variante del modelo anterior M-12.2.

Los dos tetraedros regulares conjugados son de igual tamaño que los del M-12.2, siendo el dado de caras macizas y el conjugado de caras vaciadas

Para la construcción de este modelo, se precisan las siguientes piezas:

1) TETRAEDRO REGULAR CONVEXO DADO, DE ARISTA $a_4 = 124{,}3$ mm

Este tetraedro es igual al del modelo M-12.2, siendo pues:

PIEZA Nº 1 CARAS SUPERFICIALES 4 unidades

Igual a la pieza nº 1 (fig. 1) del modelo M-12.2

PIEZA Nº 2 REFUERZO NORMAL DE LAS CARAS SUPERFICIALES 4 unidades

Igual a la pieza nº 2 (fig. 2) del modelo M- 12.2

UNE A 4-210 x 297

Modelo M-12.3

PIEZA Nº 3 REFUERZO TRANSVERSAL DE LAS CARAS SUPERFICIALES 12 unidades

Igual a la pieza nº 3 (fig. 3) del modelo M-12.2

PIEZA Nº 4 UNIONES ARISTAS 6 unidades

Igual a la pieza nº 4 (fig. 4) del modelo M-12.2

PIEZA Nº 5 FORRO COLOREADO DE LAS CARAS SUPERFICIALES 4 unidades

La forma y dimensiones se detallan en la figura 1 de este modelo

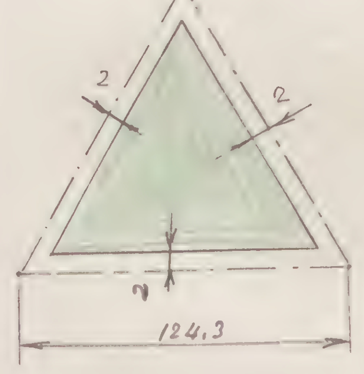


Figura 1

PIEZA Nº 5 6 (1)

Figura 1

---

2) CUATRO TETRAEDROS REGULARES DE CARAS VACIADAS Y ARISTAS $a_4 = \frac{124,3}{2} = 62,2$ mm.

Estos cuatro tetraedros son los que se obtienen en el conjugado

Calvare Febrero 1979



del 1) al ser cortado por las caras de aquél en los puntos medios de éste. Para su construcción se precisan las siguientes piezas:

PIEZA Nº 6 DESARROLLO DE LAS TRES CARAS LATERALES EN CADA VÉRTICE 4 unidades

Igual a la pieza nº 7 (fig. 5) del modelo M-19.3

PIEZA Nº 8 UNIONES ARISTAS 12 unidades

Igual a la pieza nº 8 (fig. 6) del modelo M-19.3

UNE A 4·210 x 297

[illegible] Febrero 1979

MODELO CORPÓREO DEL POLIEDRO CÓNCAVO OBTENIDO POR LA INTERSECCIÓN DEL DODECAEDRO E ICOSAEDRO REGULARES CONVEXOS, CONJUGADOS AMBOS POR SUS ARISTAS ——————————

Radio de la esfera circunscrita al icosaedro:

$r' = 110$ mm

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo del poliedro cóncavo, obtenido por la intersección del dodecaedro e icosaedro regulares convexos, conjugados ambos por sus aristas.

Se dice que un dodecaedro y un icosaedro regulares y convexos, son conjugados por sus aristas, cuando sus respectivas aristas se cortan dos a dos perpendicularmente.

En estas circunstancias, los radios de sus esferas circunscritas, de centro común, son de longitudes diferentes, siendo el del icosaedro mayor que el del dodecaedro.

Este poliedro ha sido estudiado en el ejercicio G.E. , y representado en la lámina nº 18.

Se toma como dato único el radio r_{ec}^{20} de la esfera circunscrita al icosaedro

DATO: Radio "r_{ec}^{20}" de la esfera circunscrita al icosaedro:

$$r_{ec}^{20} = 110 \text{ mm}$$

La construcción de este modelo la realizamos con las caras macizas en ambos poliedros generadores

Para ello se precisan las siguientes piezas:



1) ICOSAEDRO REGULAR CONVEXO DE CARAS MACIZAS

PIEZA Nº 1 CARAS SUPERFICIALES 20 unidades

Son triángulos equiláteros, cuya forma y dimensiones se detallan en la figura 1

La longitud de su arista a_{20}, se deduce de la fórmula nº del ejercicio G.E. despejando en ella a_{20}

$$r_{ec}^{20} = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4} a_{20} \quad \text{de donde} \quad a_{20} = \frac{4}{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} r_{ec}^{20} =$$

$$= \sqrt{\frac{16}{10 + 2\sqrt{5}}} r_{ec}^{20} = \sqrt{\frac{8}{5 + \sqrt{5}}} r_{ec}^{20} = \sqrt{\frac{8(5-\sqrt{5})}{20}} r_{ec}^{20} = \sqrt{\frac{4(5-\sqrt{5})}{10}} r_{ec} =$$

$$= 2\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}} r_{ec}^{20} \cong 1.05\ 14\ 62\ 22\ 4 \ldots \times 110 \cong 115,66\ 08\ 44\ 6 \ldots \cong 115.7 \text{ mm}$$

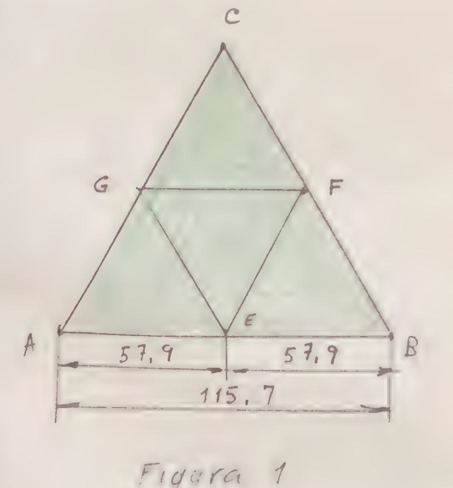


Figura 1

PIEZA Nº 1 20 (u)

Figura 1

Marcar el triángulo para situación del dodecaedro

PIEZA Nº 2 REFUERZO NORMAL INTERIOR 20 unidades

Su forma y dimensiones se obtienen de las del triángulo ABC de la figura 1, y se detallan en la figura 2



Modelo M-18.1

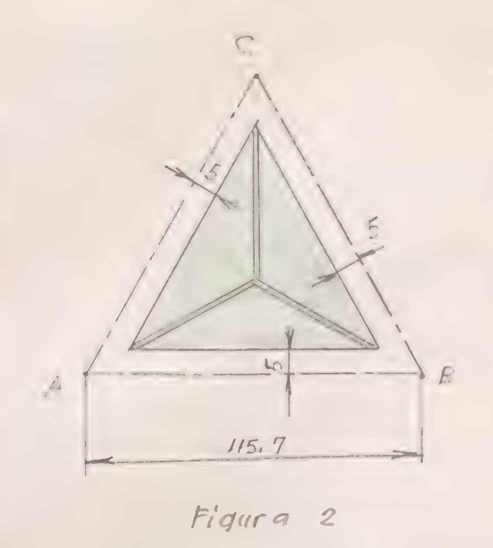


Figura 2

PIEZA Nº 2 20 (u)

Figura 2

PIEZA Nº 3 REFUERZO TRANSVERSAL INTERIOR 60 unidades (simétricas 2 a 2)

La forma y dimensiones se detallan en la figura 3; su colocación en la figura 2.

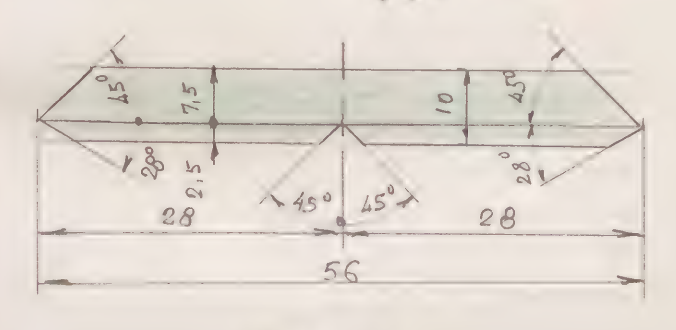


Figura 3

PIEZA Nº 3 60 (u) (simétricas)

Figura 3

PIEZA Nº 4 UNIONES ARISTAS 30 unidades

La forma y dimensiones se detallan en la figura 4

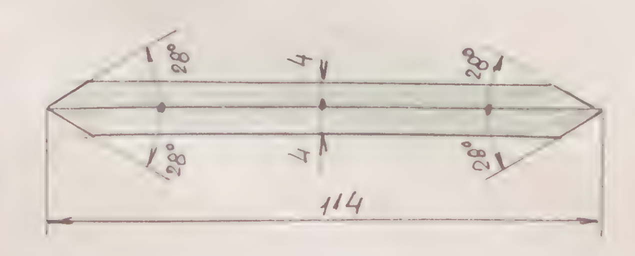


Figura 4

PIEZA Nº 4 30 (u)

Figura 4

UNE A4 210 x 297

Alvarez Febrero 1978

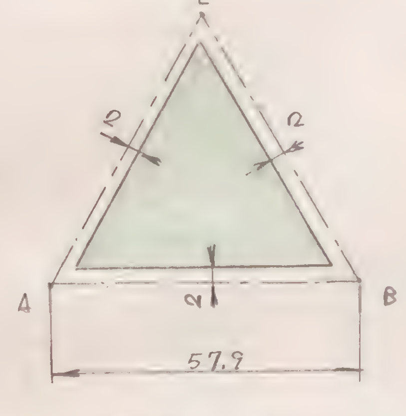


		Modelo M- 18.1

PIEZA Nº 5 FORRO COLOREADO 60 unidades

Son triángulos equiláteros y cubren parcialmente cada cara ((tres triángulos en cada una).

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 5



PIEZA Nº 5 60 (u)

Figura 5

Figura 5

2) DODECAEDRO REGULAR DE CARAS MACIZAS

La parte aparente del dodecaedro, se reduce a veinte pirámides triangulares producida por truncadura de sus vértices en el centro de sus aristas.

La longitud de la arista a_{12} del dodecaedro generador, se deduce de la fórmula obtenida en el ejercicio a.E. , lám 17

$$a_{12} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \times a_{20}$$ en la que sustituiremos a_{20} por su valor (ver h 2)

$$\boxed{a_{12}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \times 2\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}} \times r_{ec}^{20} = \sqrt{\frac{(5-\sqrt{5})(\sqrt{5}-1)}{10}} \cdot r_{ec}^{20} = \sqrt{\frac{(5-\sqrt{5})(5+1-2\sqrt{5})}{10}} \times r_{ec}^{20} =$$

$$= \sqrt{\frac{(5-\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}{5}} \cdot r_{ec}^{20} = \sqrt{\frac{15-3\sqrt{5}-5\sqrt{5}+5}{5}} \cdot r_{ec}^{20} = 2\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}} \times r_{ec}^{20} =$$

$$\simeq 0,64\,98\,39\,39\,3. \times 110 \simeq 71,48\,23\,33\,23. \simeq \boxed{71,5 \text{ mm}}$$

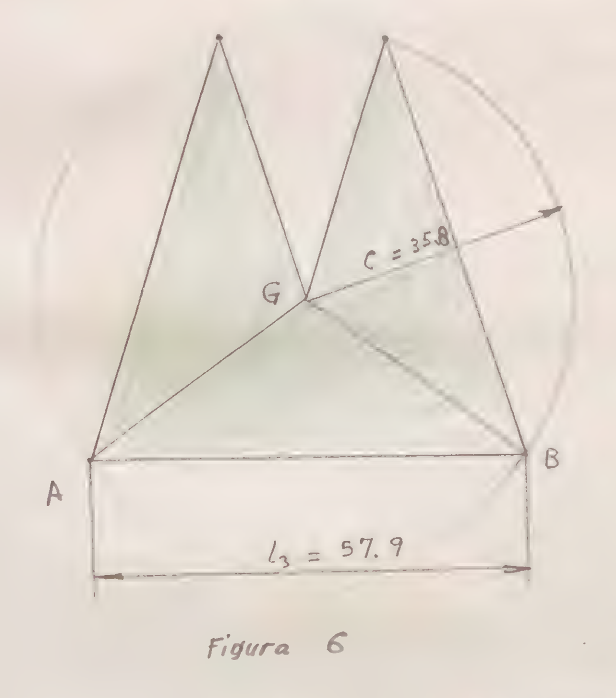
UNE A4 210 x 297

Calvarez Febrero 1979

PIEZA Nº 6 DESARROLLO LATERAL DE LAS PIRÁMIDES APADENTES 20 unidades

Son pirámides rectas triangulares. Su arista lateral "c" tiene la longitud $\boxed{c} = \frac{a_{12}}{2} = \frac{71,5}{2} = 35,8$ mm y el lado del triángulo equilátero de su base: $\boxed{l_3} = \frac{a_{20}}{2} = \frac{115,7}{2} = 57,9$ mm

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 6



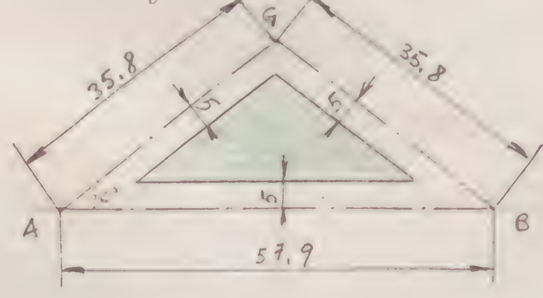
PIEZA Nº 6 20 (u)

Figura 6

Figura 6

PIEZA Nº 7 REFUERZO NORMAL INTERIOR 60 unidades

Su forma y dimensiones se deducen del triángulo ABG de la fig. 6, y se detallan en la figura 7



PIEZA Nº 7 60 (u)

Figura 7

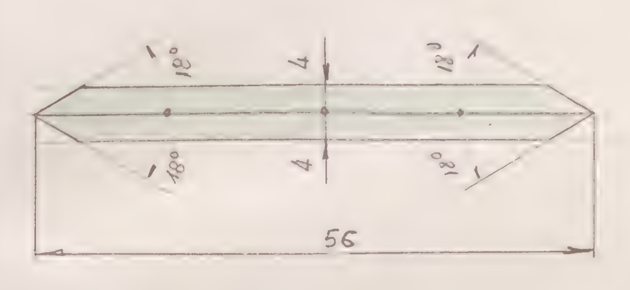
Figura 7

Febrero 1979



PIEZA Nº 8 UNIONES ARISTAS EN LA BASE DE LAS PIRAMIDES LATERALES (lado AB, fig: 7) 30 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 8



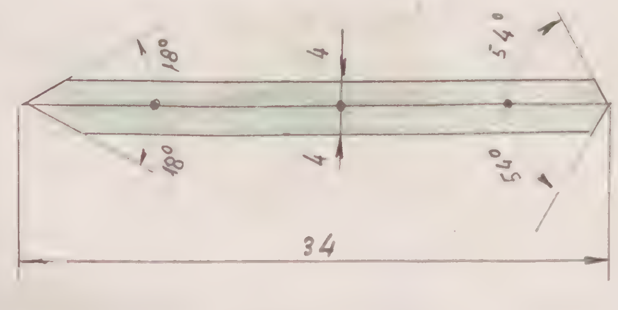
PIEZA Nº 8 30 (u)

Figura 8

Figura 8

PIEZA Nº 9 UNIONES ARISTAS EN CARAS PIRÁMIDES LATERALES (lado AG = GB fig. 7) 60 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 9



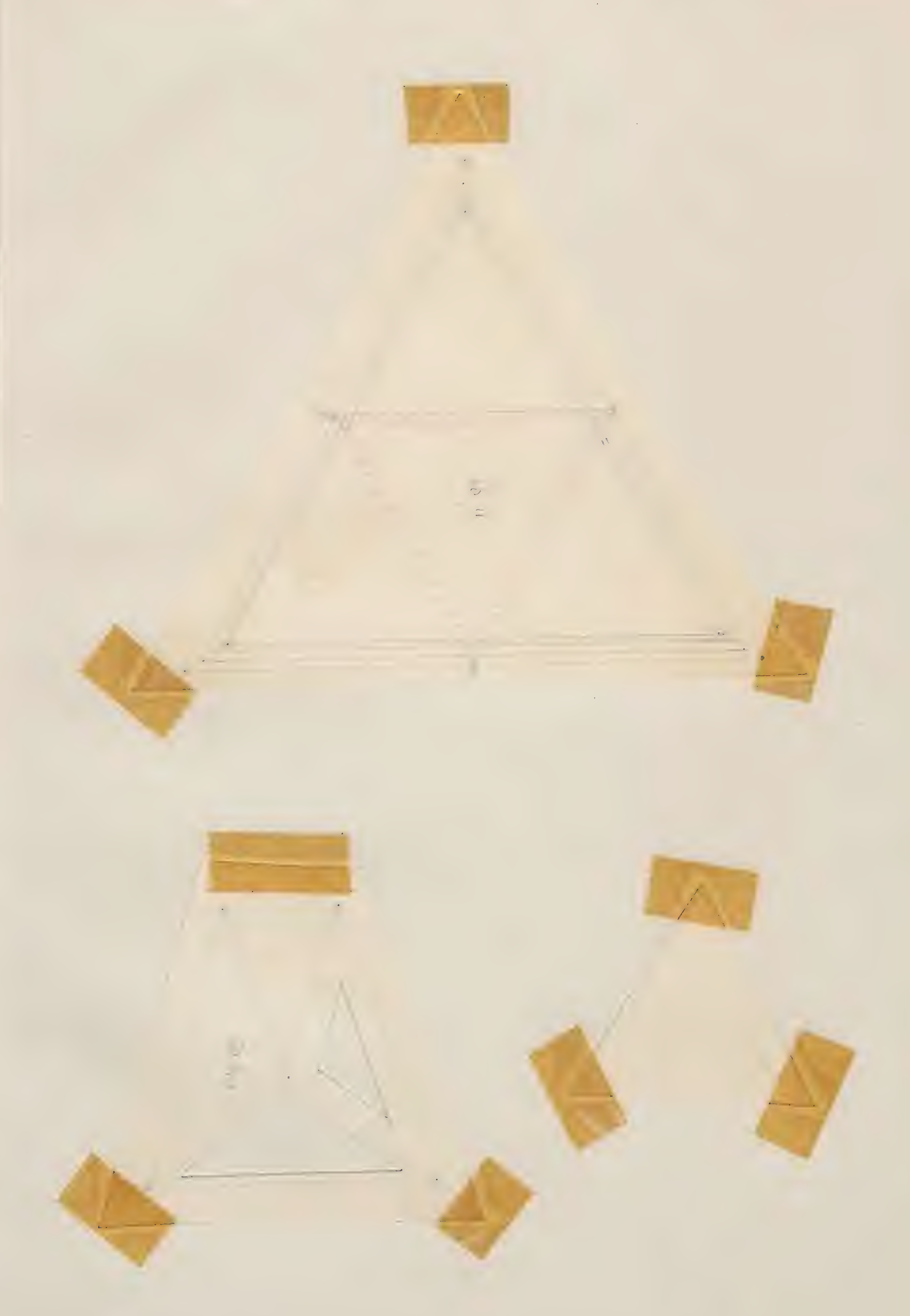
PIEZA Nº 9 60 (u)

Figura 9

Figura 9

UNE A4 210 x 297





MODELO CORPÓREO EN EL QUE SE PONE DE MANIFIESTO QUE EL POLIEDRO CÓNCAVO DEL MODELO M-18.1, ES INSCRIPTIBLE EN EL POLIEDRO CONVEXO DEL MODELO M-32.2

Radio de la esfera circunscrita común

$r' = 110$ mm

ENUNCIADO: Construir el poliedro cóncavo del modelo M-18.1, e inscribirlo en el poliedro convexo del modelo M-32.2

El modelo M-18.1, de caras macizas, es un poliedro cóncavo obtenido por la intersección de un dodecaedro y un icosaedro, regulares, convexos y conjugados por sus aristas. Al unir los extremos de cada dos aristas que se cortan perpendicularmente, se obtienen caras planas rómbicas, cuyo conjunto forman el poliedro convexo del modelo M-32.2. Las diagonales de las caras rómbicas son las aristas del dodecaedro e icosaedro generadores, lo que demuestra que son vértices del mencionado modelo M-32.2, por lo cual puede ser inscrito en el modelo M-18.1, por ser coincidentes sus vértices.

El modelo que estudiamos, tiene macizas las caras del poliedro cóncavo M-18.1, y huecas las del M-32.2

Para la construcción de este modelo se precisan las siguientes piezas:

1) POLIEDRO EXTERIOR DE CARAS HUECAS

PIEZA Nº 1 CARAS SUPERFICIALES 30 unidades

Iguales a las de la fig. 1 del modelo M-32.2

UNE A4 210 x 297



		Modelo M - 18.2

PIEZA Nº 2 UNIONES ARISTAS 60 unidades

Iguales a las de la figura 2 del modelo M - 32.2

2) POLIEDRO INTERIOR DE CARAS MACIZAS

PIEZA Nº 3 CARAS SUPERFICIALES 20 unidades

Iguales a las de la figura 1 del modelo M- 18.1

PIEZA Nº 4 REFUERZO NORMAL INTERIOR 20 unidades

Iguales a las de la figura 2 del modelo M - 18.1

PIEZA Nº 5 REFUERZO TRANSVERSAL INTERIOR 60 unidades

Iguales a las de la figura 3 del modelo M - 18.1

PIEZA Nº 6 UNIONES ARISTAS 30 unidades

Iguales a las de la figura 4 del modelo M - 18.1

TAlvarez Febrero 1979

PIEZA Nº 7 FORRO COLOREADO 60 unidades

Iguales a las de la figura 5 del modelo M-18.1

PIEZA Nº 8 DESARROLLO LATERAL DE LAS PIRÁMIDES APARENTES 20 unidades

Iguales a las de la figura 6 del modelo M-18.1

PIEZA Nº 9 REFUERZO NORMAL INTERIOR 60 unidades

Iguales a las de la figura 7 del modelo M-18.1

PIEZA Nº 10 UNIONES ARISTAS EN LA BASE DE LAS PIRÁMIDES LATERALES 30 unidades

Iguales a las de la figura 8 del modelo M-18.1

PIEZA Nº 11 UNIONES ARISTAS EN CARAS PIRÁMIDES LATERALES 60 unidades

Iguales a las de la figura 9 del modelo M-18.1

UNE A4 210 x 297

Variante del modelo M - 18.1

MODELO CORPÓREO DEL POLIEDRO CÓNCAVO OBTENIDO POR LA INTERSECCIÓN DE UN DODECAEDRO E ICOSAEDRO REGULARES CONVEXOS, CONJUGADOS AMBOS POR SUS ARISTAS.

Radio de la esfera circunscrita al icosaedro:

r' = 110 mm

variante del modelo M - 18.1

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo del poliedro cóncavo, obtenido por la intersección de un dodecaedro y un icosaedro regulares convexos, conjugados ambos por sus aristas.

Este modelo es análogo al estudiado en el M - 18.1, y tiene con respecto a éste, las siguientes variantes:

1) El dodecaedro regular convexo es de caras macizas.

2) La parte aparente del icosaedro regular convexo, es de caras vaciadas.

Las dimensiones de este modelo son las mismas que las del M - 18.1

Para la construcción de éste, se necesitan las siguientes piezas:

1) ICOSAEDRO REGULAR CONVEXO DE CARAS VACIADAS

PIEZA Nº 1 PIRÁMIDES PENTAGONALES APARENTES, SOBRE LAS CARAS DEL DODECAEDRO. 12 unidades

La forma y dimensiones de su desarrollo lateral se detallan en la figura 1.

UNE A4 210 x 297



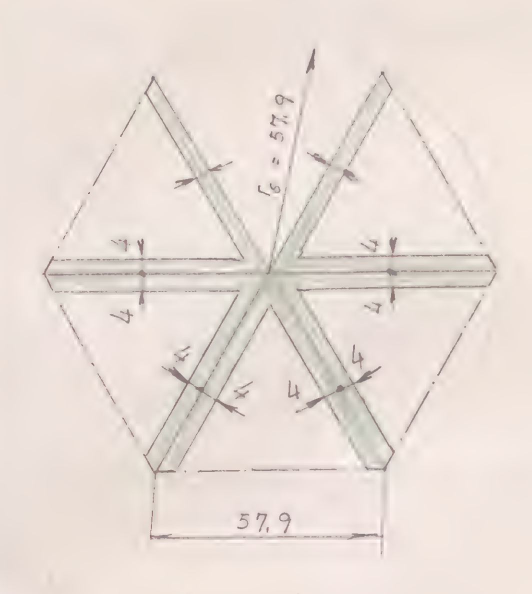


Figura 1

PIEZA Nº 1 12 unidades

Figura 1

PIEZA Nº 2 UNIONES ARISTAS 60 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 2

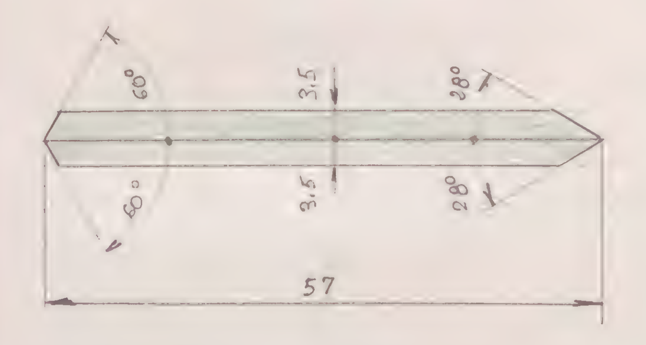


Figura 2

PIEZA Nº 2 60 (u)

Figura 2

2) DODECAEDRO REGULAR CONVEXO DE CARAS MACIZAS

PIEZA Nº 3 CARAS LATERALES 12 unidades

Son iguales a la pieza 3, fig. 1 del modelo M - 32.4 (arista "a_{12}" del dodecágono; ver mod. M - 18.1. a_{12} = 71,5 mm)

Calvanu Febrero 1979



Modelo M-18.3

PIEZA Nº 4 REFUERZO NORMAL INTERIOR 12 unidades

Iguales a la pieza nº 4, fig. 2, del modelo M-32.4

PIEZA Nº 5 REFUERZO TRANSVERSAL INTERIOR 36 unidades

Iguales a la pieza nº 5, figura 3, del modelo M-32.4

PIEZA Nº 6 UNIONES ARISTAS 30 unidades

Iguales a la pieza nº 6, figura 4, del modelo M-32.4

PIEZA Nº 7 FORRO COLOREADO 12 unidades

Iguales a la pieza nº 7, figura 5, del modelo M-32.4

UNE A4 210 x 297

[illegible] Febrero 1979




PATRONES

Variante del modelo M-18.1

MODELO CORPÓREO DEL POLIEDRO CÓNCAVO OBTENIDO POR LA INTERSECCIÓN DE UN DODECAEDRO Y DE UN ICOSAEDRO REGULARES CONVEXOS CONJUGADOS AMBOS POR SUS ARISTAS.

Radio de la esfera circunscrita al icosaedro:

$r' = 110$ mm

	Ejercicios de construcción de poliedros MODELOS CORPÓREOS	Modelo M-18.4

Variante del modelo M-18.1

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo del poliedro cóncavo, obtenido por la intersección de un dodecaedro y un icosaedro regulares convexos, conjugados ambos por sus aristas.

Este modelo es análogo al estudiado en el M-18.1, y tiene con respecto a éste, las siguientes variantes:

1) La parte aparente del dodecaedro regular convexo, es de caras vaciadas.

2) El icosaedro regular convexo, es de caras macizas

Las dimensiones de este modelo, son las mismas que las del M-18.1.

Para la construcción de éste, se necesitan las siguientes piezas:

1) DODECAEDRO REGULAR CONVEXO DE CARAS VACIADAS

PIEZA Nº 1 PIRÁMIDES TRIANGULARES APARENTES, SOBRE LAS CARAS DEL ICOSAEDRO 20 unidades

Las formas y dimensiones de su desarrollo lateral, se detallan en la figura 1

Modelo M-18.4

$r = \frac{a_{12}}{2} = \frac{71,5}{2} = 35,8$ mm

$b = \frac{a_{20}}{2} = \frac{115,7}{2} = 57,9$ mm

4 4 4 4 4 4

35,8 = r

b = 57,9

Figura 1

PIEZA Nº 1 20 (u)

Figura 1

PIEZA Nº 2 UNIONES ARISTAS 60 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 2

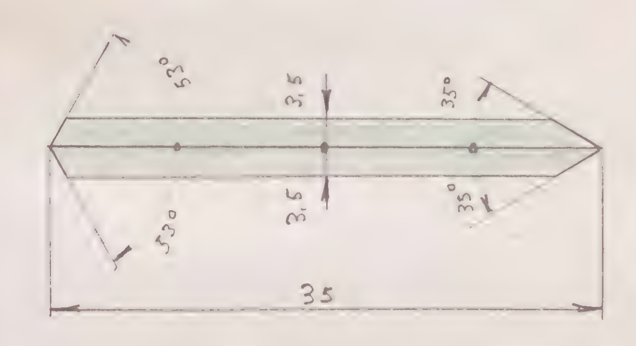


Figura 2

PIEZA Nº 2 60 (u)

Figura 2

2) ICOSAEDRO REGULAR CONVEXO DE CARAS MACIZAS

PIEZA Nº 3 CARAS SUPERFICIALES 20 unidades

Iguales a las de la pieza nº 1 fig. 1 del modelo M-18.1 (Marcar el triángulo EFG para la situación de las pirámides triangulares aparentes del dodecaedro.

UNE A4 210 x 297

Alvarez Febrero 1979



PIEZA Nº 4 REFUERZO NORMAL INTERIOR 20 unidades

Iguales a las de la pieza nº 2, fig. 2, del modelo M-18.1

PIEZA Nº 5 REFUERZO TRANSVERSAL INTERIOR 60 unidades

Iguales a las de la pieza nº 3, fig. 3, del modelo M-18.1

PIEZA Nº 6 UNIONES ARISTAS 30 unidades

Iguales a las de la pieza nº 4, fig. 4, del modelo M-18.1

PIEZA Nº 7 FORRO COLOREADO 20 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 3

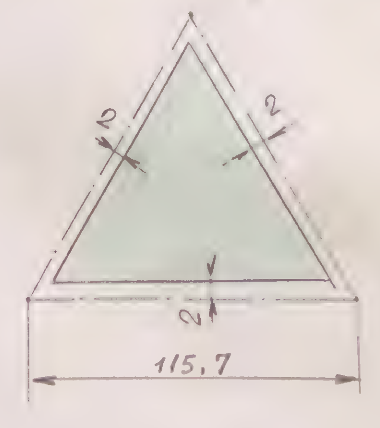


Figura 3

PIEZA Nº 7 20 (4)

Figura 3

Febrero 1979

[illegible] [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

Variante del modelo 18.1

MODELO CORPÓREO DERIVADO DEL POLIEDRO CÓNCAVO OBTENIDO POR LA INTERSECCIÓN DE UN DODECAEDRO Y DE UN ICOSAEDRO REGULARES CONVEXOS, CONJUGADOS AMBOS POR SUS ARISTAS, COMPUESTO DEL NÚCLEO O SÓLIDO COMÚN DE LOS DOS POLIEDROS GENERADORES (ARQUIMEDIANO IV.- LÁM. 36) Y DEL ICOSAEDRO GENERADOR.

Radio de la esfera circunscrita al icosaedro:

$r' = 110$ m.m.

Variante del modelo M-18.1

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo derivado del poliedro cóncavo obtenido por la intersección de un dodecaedro y un icosaedro regulares convexos, conjugados ambos por sus aristas, compuesto de A) Núcleo o sólido común de los dos poliedros generadores (arquimediano IV) y B) El icosaedro generador.

En el modelo que se estudia se destacan las propiedades siguientes del modelo M-18.1:

1º Que el sólido común de la intersección del dodecaedro e icosaedro regulares convexos generadores, es un poliedro convexo llamado "Arquimediano IV".

2º Que dicho Arquimediano IV puede considerarse engendrado por cortadura de los ángulos sólidos de un icosaedro regular convexo, por planos que pasan por los puntos medios de las cinco aristas que concurren en cada vértice del mencionado icosaedro.

Este modelo está compuesto de los siguientes poliedros:

1º El arquimediano IV de caras macizas, siendo sus aristas mitad de las del icosaedro generador $\left(a_{IV} = \frac{a_{20}}{2} \right)$

UNE A4 210 x 297



		Modelo M-18.5

7 2°. El icosaedro generador de caras vaciadas, inscrito en una esfera de radio $r_{ec}^{20} = 110$ m m.

Para la construcción de este modelo se precisan las siguientes piezas:

1) ARQUIMEDIANO IV, DE CARAS MACIZAS.

Este poliedro cóncavo ha sido estudiado en el ejercicio G. E. , y representado en la lámina 36.- Tiene las siguientes características:

1)	Número de caras triangulares	$C_3 = 20$
2)	Número de caras pentagonales	$C_5 = 12$
3)	Número de vértices	$V = 30$
4)	Número de aristas	$A = 60$
5	Número de caras en un ángulo sólido	$2C_3 + 2C_5$

Todas sus aristas son de igual longitud, siendo éstas mitad de las del icosaedro generador, por lo que:

$$a_{IV} = \frac{a_{20}}{2} = \frac{115.7}{2} = 57.9 \text{ mm}$$

A1) CARAS PENTAGONALES

PIEZA Nº 1 CARAS SUPERFICIALES

12 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 1

UNE A4 210 x 297

Febrero 1979



D
E C
$r_{C-5} = 49,3$
G
A B
57.9

Figura 1

Radio de la circunferencia circunscrita al pentágono de lado 57,9

$r_{C-5} = 0,85065 \times 57,9 = 49,3$ mm

PIEZA Nº 1 12 (u)

Figura 1

PIEZA Nº 2 REFUERZO NORMAL INTERIOR 12 unidades

Su forma y dimensiones se deducen de las del pentágono ABCDE de la figura 1, y se detallan en la figura 2.

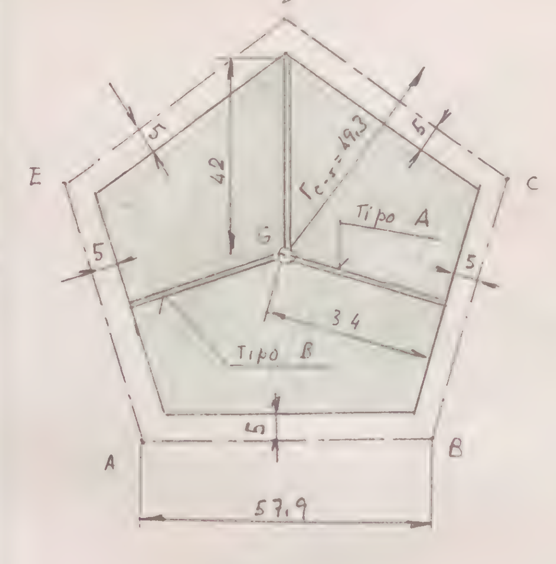


Figura 2

PIEZA Nº 2 12 (u)

Figura 2

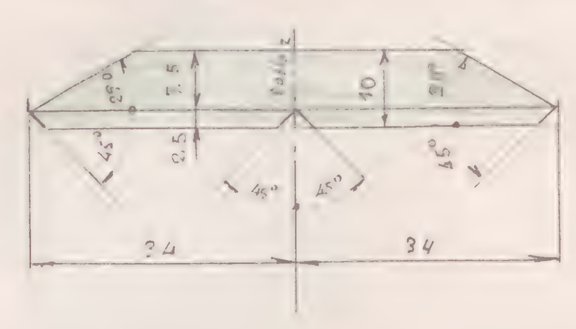
PIEZA Nº 3 REFUERZO TRANSVERSAL INTERIOR 36 unidades
(12 del tipo B y 24 del tipo A) (simétricas 2 a 2)

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 3.

Febrero 1979



Para su situación ver figura 2



PIEZA Nº 3 Tipo B

12 (u)

(simétricas 2 a 2)

Figura 3

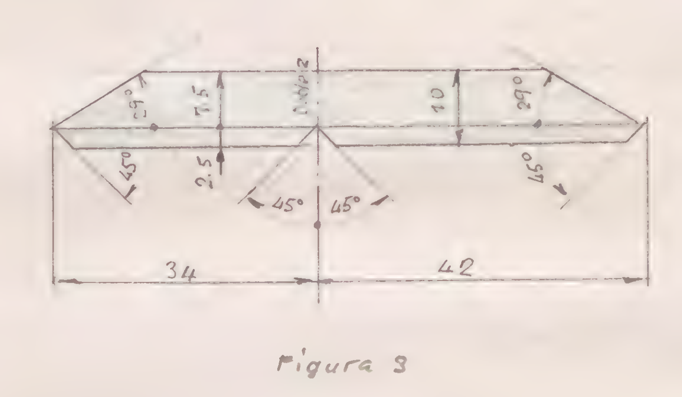


Figura 3

PIEZA Nº 3 Tipo A

24 (unidades)

(simétricas 2 a 2

Figura 3

PIEZA Nº 4 UNIONES ARISTAS DEL ARQUIMEDIANO IV

60 unidades (simétricas 2 a 2)

PIEZA Nº 4 60 (u)



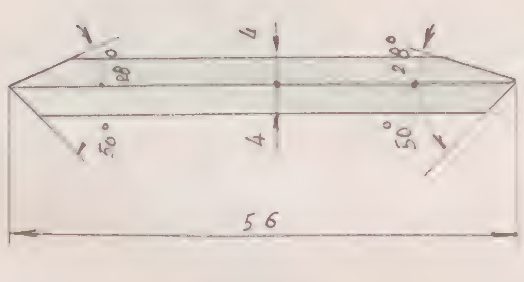


Figura 4

Figura 4

PIEZA Nº 5 FONDO COLOREADO 12 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 5, y se deducen de las del pentágono regular ABCDE de la figura 1.

Modelo M-18.5

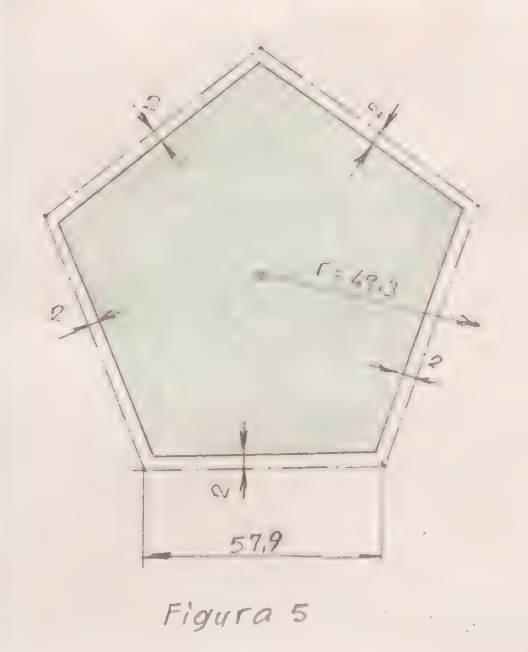


Figura 5

PIEZA Nº 5 12 (u)

Figura 5

A2) CARAS TRIANGULARES

PIEZA Nº 6 CARAS SUPERFICIALES 20 unidades

Son triángulos equiláteros; su forma y dimensiones se detallan en la figura 6

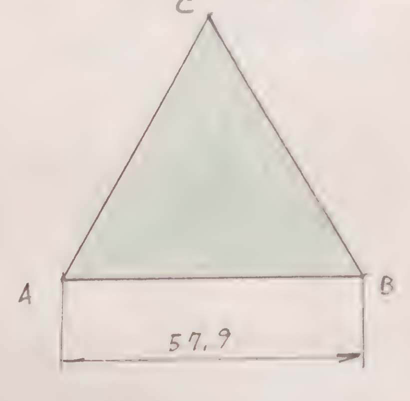


Figura 6

PIEZA Nº 6 20 (u)

Figura 6

PIEZA Nº 7 REFUERZO NORMAL INTERIOR 20 unidades

Su forma y dimensiones se deducen de las del triangulo ABC de la figura 6, y se detallan en la figura 7

UNE A4 210 x 297

Febrero 1979



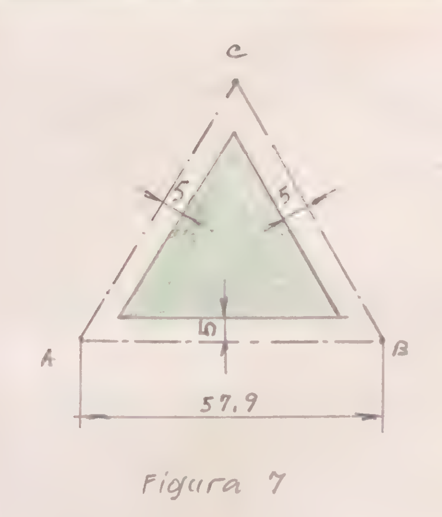


Figura 7

PIEZA Nº 7   20 (u)

Figura 7

PIEZA Nº 8   FORRO COLOREADO   20 unidades

Su forma y dimensiones se deducen de las del triángulo ABC de la figura 6, y se detallan en la figura 8

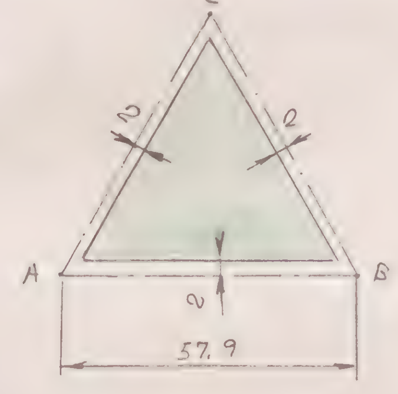


Figura 8

PIEZA Nº 8   20 (u)

Figura 8

2) ICOSAEDRO GENERADOR DE CARAS VACIADAS

PIEZA Nº 9   PIRÁMIDES APARENTES SOBRE LAS CARAS PENTAGONALES DEL ARQUIMEDIANO IV, DE CARAS VACIADAS   12 unidades

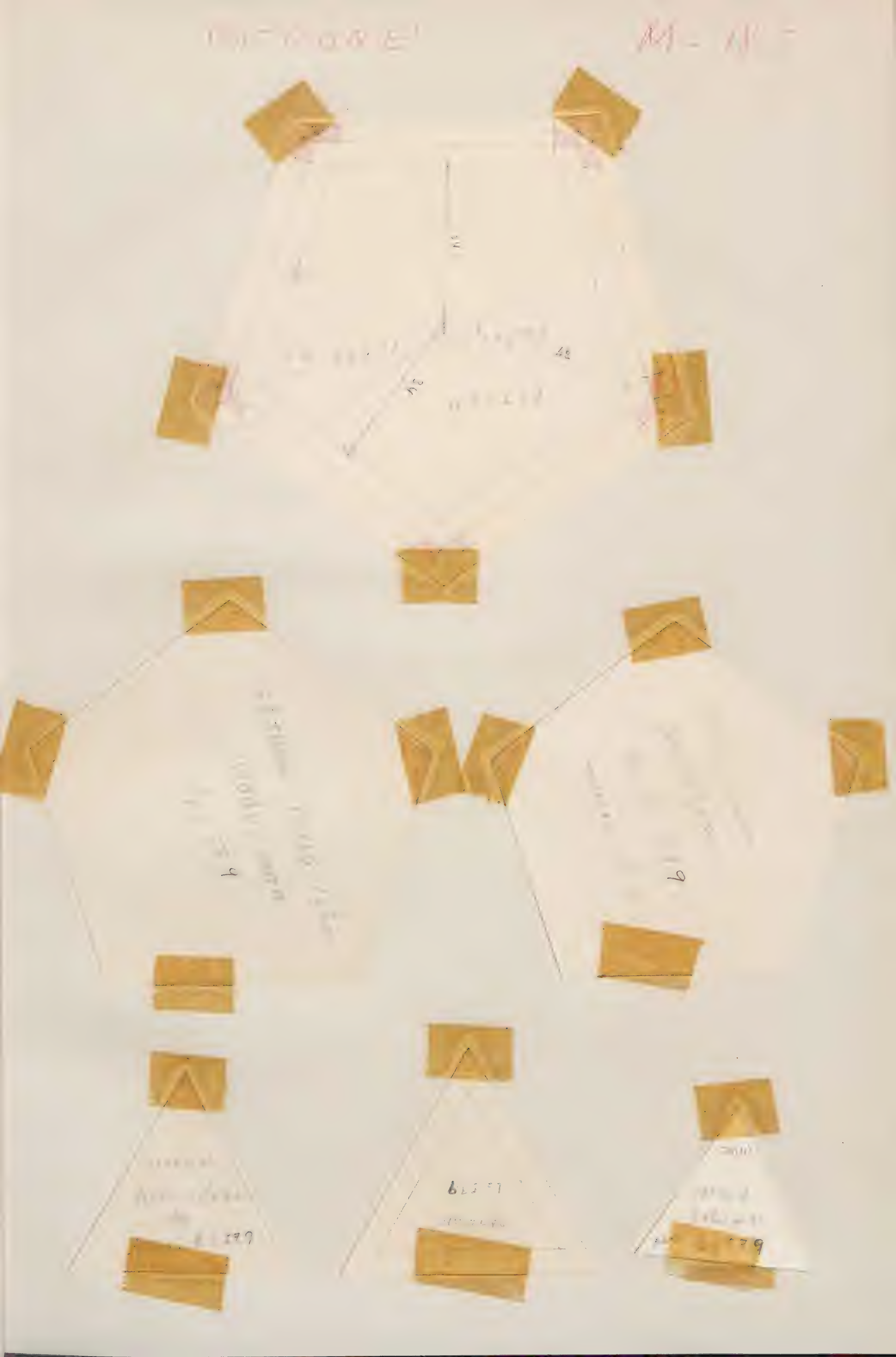
Son iguales a las de la pieza nº 1, figura 1, del modelo M-18.3



PIEZA Nº 10 UNIONES ARISTAS DE LAS PIRÁMIDES APARENTES 60 unidades

Son iguales a las de la pieza nº 2, figura 2, del modelo M - 18.3

UNE A4 210 x 297



Variante del modelo M-18.1

MODELO CORPÓREO DERIVADO DEL POLIEDRO CÓNCAVO OBTENIDO POR LA INTERSECCIÓN DE UN DODECAEDRO Y DE UN ICOSAEDRO REGULARES CONVEXOS, CONJUGADOS AMBOS POR SUS ARISTAS, COMPUESTO DEL NÚCLEO O SÓLIDO COMÚN DE LOS DOS POLIEDROS GENERADORES (ARQUIMEDIANO IV.- Lám. 36) Y DEL DODECAEDRO GENERADOR ——————————

Radio de la esfera circunscrita al icosaedro:

$r' = 110$ mm

Varianto del modelo M-18.1

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo derivado del poliedro cóncavo obtenido por la intersección de un dodecaedro y un icosaedro regulares convexos, conjugados ambos por sus aristas, compuesto de:
A) Núcleo o sólido común de los dos poliedros generadores (arquimediano IV) y B) El dodecaedro generador.

En el modelo que se estudia se destacan las propiedades siguientes del modelo M-18.1:

1º Que el sólido común de la intersección del dodecaedro e icosaedro regulares convexos, generadores, es un poliedro convexo denominado "Arquimediano IV"

2º Que dicho Arquimediano IV puede considerarse engendrado por cortadura de los ángulos sólidos de un dodecaedro regular convexo, por planos que pasan por los puntos medios de las tres aristas que concurren en cada vértice del mencionado dodecaedro.

Este modelo está compuesto por los siguientes poliedros:

1º El Arquimediano IV de caras macizas, cuyas aristas son la mitad de las del icosaedro generador $\left(a_{IV} = \frac{a_{20}}{2}\right)$



y 2º El dodecaedro generador de caras vaciadas, inscrito en una esfera de menor radio que el icosaedro generador

$$r_{ec}^{20} > r_{ec}^{12}$$

Para la construcción de este modelo, se precisan las siguientes piezas:

1) ARQUIMEDIANO IV DE CARAS MACIZAS

A1) CARAS PENTAGONALES

PIEZA Nº 1 CARAS SUPERFICIALES 12 unidades

Iguales a las de la pieza nº1, fig. 1, del modelo M-18.5

PIEZA Nº 2 REFUERZO NORMAL INTERIOR 12 unidades

Iguales a las de la pieza nº 2, fig. 2, del modelo M-18.5

PIEZA Nº 3 REFUERZO TRANSVERSAL INTERIOR 36 unidades (simétricas 2 a 2)

Iguales a las de la pieza nº 3, fig. 3, del modelo M-18.5

UNE A4·210 x 297

Febrero 1979



PIEZA Nº 4 UNIONES ARISTAS DEL ARQUIMEDIANO IV

60 unidades (simétricas 2 a 2)

Iguales a las de la pieza nº 4, fig. 4 de modelo M-18.5

PIEZA Nº 5 FORRO COLOREADO 12 unidades

Iguales a las de la pieza nº 5, fig. 5, del modelo M-18.5

A2) CARAS TRIANGULARES

PIEZA Nº 6 CARAS SUPERFICIALES TRIANGULARES 20 unidades

Iguales a las de la pieza nº 6, fig. 6, del modelo M-18.5

PIEZA Nº 7 REFUERZO NORMAL INTERIOR 20 unidades

Iguales a las de la pieza nº 7, fig. 7, del modelo M-18.5

PIEZA Nº 8 FORRO COLOREADO 20 unidades

Iguales a las de la pieza nº 8, fig. 8, del modelo M-18.5

2) DODECAEDRO GENERADOR DE CARAS VACIADAS

PIEZA Nº 9 PIRÁMIDES APARENTES SOBRE LAS CARAS TRIANGULARES DEL ARQUIMEDIANO IV, DE CARAS VACIADAS 20 unidades

Iguales a las de la pieza nº 1, fig. 1, del modelo M-18.4

PIEZA Nº 10 · UNIONES ARISTAS EN CARAS LATERALES PIRÁMIDES APARENTES 60 unidades

Iguales a las de la pieza nº 2, fig. 2, del modelo M-18.4

UNE A4 210 x 297

Calvache Febrero 1977

Variante del modelo M-18.1

MODELO CORPÓREO DERIVADO DEL POLIEDRO CÓNCAVO OBTENIDO POR LA INTERSECCIÓN DE UN DODECAEDRO Y DE UN ICOSAEDRO REGULARES CONVEXOS, CONJUGADOS AMBOS POR SUS ARISTAS, COMPUESTO DEL NÚCLEO O SÓLIDO COMÚN DE LOS DOS POLIEDROS GENERADORES (ARQUIMEDIANO IV.- Lám. 36) Y DEL DODECAEDRO E ICOSAEDRO GENERADORES.

Radio de la esfera circunscrita al icosaedro:

r' = 110 mm.

Variante del modelo M-18.1

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo derivado del poliedro cóncavo obtenido por la intersección de un dodecaedro y un icosaedro regulares convexos, conjugados ambos por sus aristas, compuesto de: A) Núcleo o sólido común de los dos poliedros generadores (arquimediano IV); B) el dodecaedro generador y C) el icosaedro generador

En el modelo que se estudia se destacan las propiedades siguientes del modelo M-18.1:

1º Que el sólido común de la intersección del dodecaedro e icosaedro regulares convexos generadores, es un poliedro convexo denominado "Arquimediano IV".

2º Que dicho Arquimediano IV puede considerarse engendrado por cortadura de los ángulos sólidos del dodecaedro e icosaedro generadores, por planos que pasan por los puntos medios de las aristas que concurren en los vértices de los mencionados poliedros regulares generadores.

Este modelo está compuesto por los siguientes poliedros:

1º El Arquimediano IV de caras macizas, cuyas aristas son la mitad de las del icosaedro generador ($a_{IV} = \frac{a_{20}}{2}$)

UNE A4 210 x 297



2º El dodecaedro generador de caras vaciadas inscrito en una esfera de menor radio que el del icosaedro generador ($r^{20}_{ec} > r^{12}_{ec}$)

3º El icosaedro generador de caras vaciadas, inscrito en una esfera de radio $r^{20}_{ec} = 110$ m m.

Para la construcción de este modelo, se precisan las siguientes piezas:

1) ARQUIMEDIANO IV DE CARAS MACIZAS

A1) CARAS PENTAGONALES

PIEZA Nº 1 CARAS SUPERFICIALES 12 unidades

Iguales a la pieza nº 1, fig. 1, del modelo M - 18.5

PIEZA Nº 2 REFUERZO NORMAL INTERIOR 12 unidades

Iguales a la pieza nº 2, fig. 2, del modelo M - 18.5

UNE A4·210 x 297



PIEZA Nº3 REFUERZO TRANSVERSAL INTERIOR 36 unidades (simétricas 2 a 2)

Iguales a las de la pieza nº 3, fig. 3, del modelo M-18.5

PIEZA Nº4 UNIONES ARISTAS DEL ARQUIMEDIANO IV

60 unidades (simétricas 2 a 2)

Iguales a las de la pieza nº 4, fig. 4, del modelo M-18.5

PIEZA Nº 5 FORRO COLOREADO 12 unidades

Iguales a las de la pieza nº 5, fig. 5 del modelo M-18.5

A2) CARAS TRIANGULARES

PIEZA Nº 6 CARAS SUPERFICIALES TRIANGULARES 20 unidades

Iguales a las de la pieza nº 6, fig. 6, del modelo M-18.5

PIEZA Nº7 REFUERZO NORMAL INTERIOR 20 unidades

Iguales a las de la pieza nº 7, fig. 7, del modelo M-18.5

UNE A4 210 x 297



Modelo M-18.7

PIEZA Nº 8 FORRO COLOREADO 20 unidades

Iguales a las de la pieza nº 8, fig. 8, del modelo M-18.5

---

2) DODECAEDRO GENERADOR DE CARAS VACIADAS

PIEZA Nº 9 PIRÁMIDES APARENTES SOBRE LAS CARAS TRIANGULARES DEL ARQUIMEDIANO IV, DE CARAS VACIADAS 20 unidades

Iguales a las de la pieza 1, fig. 1, del modelo M-18.4

PIEZA Nº 10 UNIONES ARISTAS EN CARAS LATERALES PIRÁMIDES APARENTES 60 unidades

Iguales a las de la pieza 2, fig. 2, del modelo M-18.4

---

3) ICOSAEDRO GENERADOR DE CARAS VACIADAS

PIEZA Nº 11 PIRÁMIDES APARENTES SOBRE LAS CARAS PENTAGONALES DEL ARQUIMEDIANO IV, DE CARAS VACIADAS 12 unidades

Iguales a las de la pieza nº 1, fig. 1, del modelo M-18.3

Alvarez Febrero 1979



PIEZA Nº 12 UNIONES ARISTAS EN CARAS LATERALES PIRÁMIDES APARENTES 60 unidades

Iguales a las de la pieza nº 2, figura 2, del modelo M-18.3

UNE A4 210 x 297

[illegible] Febrero 1979

Variante del modelo M-18.7

MODELO CORPÓREO DERIVADO DEL POLIEDRO CÓNCAVO OBTENIDO POR LA INTERSECCIÓN DE UN DODECAEDRO Y DE UN ICOSAEDRO REGULARES CONVEXOS, CONJUGADOS AMBOS POR SUS ARISTAS, COMPUESTO DEL NÚCLEO O SÓLIDO COMÚN DE LOS DOS POLIEDROS GENERADORES (ARQUIMEDIANO IV.- Lám. 36) Y DEL DODECAEDRO E ICOSAEDRO GENERADORES.

Radio de la esfera circunscrita al icosaedro:

$r' = 110$ mm

Variante del modelo M - 18.7

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo derivado del poliedro cóncavo ofrecido por la intersección de un dodecaedro y de un icosaedro regulares convexos, conjugados ambos por sus aristas, compuesto de: A) Núcleo o sólido común de los dos poliedros generadores (Arquimediano IV); B) el dodecaedro generador y C) el icosaedro generador.

La variante de este modelo con respecto al M-18.7, consiste de que en éste, los tres poliedros componentes son todos de caras vaciadas, conservando sus dimensiones.

Así pues, este modelo se compone de los siguientes poliedros:

1° El Arquimediano IV de caras vaciadas, cuyas aristas son la mitad de longitud de las del icosaedro generador. ($a_{IV} = \frac{a_{20}}{2}$)

2° El dodecaedro generador de caras vaciadas, inscrito en una esfera de menor radio que el del icosaedro generador. ($r_{ec}^{20} > r_{ec}^{12}$)

3° El icosaedro generador de caras vaciadas, inscrito en una esfera de radio $r_{ec}^{20} = 110$ m m

Calvo [signature] Febrero 1979



Modelo M-18.8

Para la construcción de este modelo, se precisan las siguientes piezas:

1) ARQUIMEDIANO DE CARAS VACIADAS

PIEZA Nº 1 CARAS LATERALES PENTAGONALES

12 unidades

Son pentágonos regulares.- Su forma y dimensiones se detallan en la figura 1

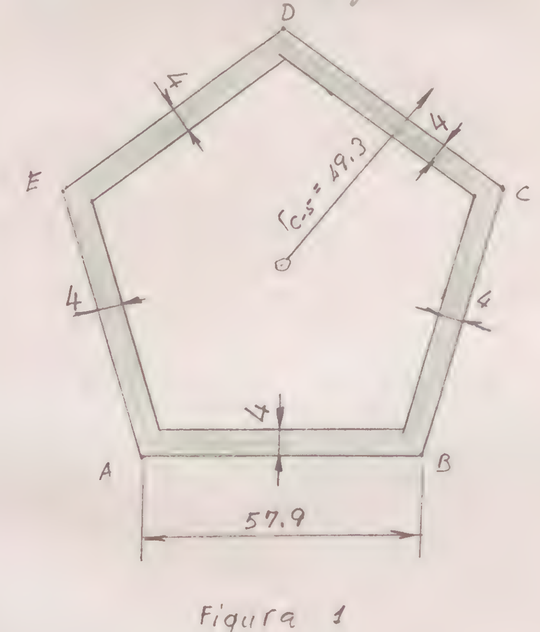


Figura 1

PIEZA Nº 1 12 (u)

Figura 1

PIEZA Nº 2 CARAS LATERALES TRIANGULARES

20 unidades

Son triángulos equiláteros.- Su forma y dimensiones se detallan, en la figura 2

UNE A4 210 x 297



C

4 4

4

A B

57.9

Figura 2

PIEZA Nº 2 20 (u)

Figura 2

PIEZA Nº 3 UNIONES ARISTAS 60 unidades
(simétricas 2 a 2)

Iguales a las de la pieza nº 4, figura 4, del modelo M- 18.5

---

2) DODECAEDRO GENERADOR DE CARAS VACIADAS

PIEZA Nº 4 PIRÁMIDES APARENTES SOBRE LAS CARAS TRIANGULARES DEL ARQUIMEDIANO IV, DE CARAS VACIADAS. 20 unidades

Iguales a las de la pieza nº1, figura 1, del modelo M-18.4

PIEZA Nº 5 UNIONES ARISTAS EN CARAS LATERALES PIRÁMIDES APARENTES 60 unidades

Iguales a las de la pieza nº 2, figura 2, de modelo M-18.4

UNE A4 210 x 297



3) ICOSAEDRO GENERADOR DE CARAS VACIADAS

PIEZA Nº 6 PIRÁMIDES APARENTES SOBRE LAS CARAS PENTAGONALES DEL ARQUIMEDIANO IV, DE CARAS VACIADAS 12 unidades

Iguales a las de la pieza nº 1, figura 1, del modelo M - 18.3

PIEZA Nº 7 UNIONES ARISTAS EN CARAS LATERALES PIRÁMIDES APARENTES 60 unidades

Iguales a las de la pieza nº 2, figura 2, del modelo M - 18.3

UNE A4 210 x 297

MODELO CORPÓREO EN EL QUE SE PONE DE MANIFIESTO QUE EL SÓLIDO COMÚN DE LA INTERSECCIÓN DE DOS TETRAEDROS REGULARES CONVEXOS, CONJUGADOS POR SUS ARISTAS, ES UN "OCTAEDRO REGULAR CONVEXO"

Radio de la esfera inscrita:

r' = 110 mm

	Ejercicio de construcción de poliedros MODELOS CORPÓREOS	Modelo M-19-1

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo del octaedro regular convexo que se obtiene como sólido común en la intersección de dos tetraedros regulares conjugados por sus aristas, estudiados en el ejercicio G.E. nº 1 y representados en la lámina nº 19.

En el modelo M-12.1, estudiamos el poliedro cóncavo obtenido por la intersección de dos tetraedros regulares convexos, iguales y conjugados por sus aristas.

Considerando la parte de espacio comprendida entre los dos tetraedros regulares, se deduce que este espacio o "sólido común" tiene la forma de un octaedro regular convexo, cuya arista a_8 "la mitad" de la longitud de la arista a_4 de ambos tetraedros generadores.

El modelo M-19.1 que estudiamos ahora, pone de manifiesto la propiedad enunciada anteriormente, cuya representación gráfica fué realizada en la lámina 19 del ejercicio G.E. Este modelo está formado por los siguientes cuerpos geométricos:

1) Octaedro regular convexo de caras vaciadas y arista $a_8 = \frac{a_4}{2}$

2) Tetraedro regular convexo de caras vaciadas

UNE A 4-210 x 297

[signature] Febrero 1979



y arista a_4, en el cual está inscrito el octaedro 1)

3) Cuatro tetraedros regulares de caras vaciadas y arista $a_4 = a_8$, que corresponden al tetraedro conjugado por las arista del 2).

DATO ÚNICO: Radio "r'" de la esfera circunscrita a los dos tetraedros regulares conjugados por sus aristas:

$$r' = 110 \text{ mm}$$

La longitud a_4 de la arista de los dos tetraedros regulares conjugados por sus aristas, ha sido deducida en el estudio del modelo M-12.1. Su valor es:

$$a_4 = \frac{2\sqrt{6}}{3} r' \cong 1.63\,29\,93\,16\,2\ldots \times 110 \cong 179.6 \text{ mm}$$

La longitud a_8 de la arista del octaedro regular 1), será:

$$a_8 \cong \frac{179.6}{2} \cong 89.8 \text{ mm}$$

Para la construcción de este modelo, se necesitan las siguientes piezas:

1) OCTAEDRO REGULAR CONVEXO, SÓLIDO COMÚN DE LOS

UNE A 4-210 x 297

DOS TETRAEDROS REGULARES CONVEXO CONJUGADOS POR SUS ARISTAS, DE CARAS VACIADAS

PIEZA Nº 1 CARAS SUPERFICIALES 8 unidades

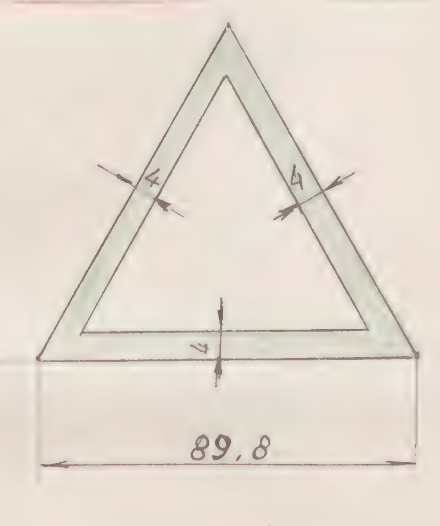


Figura 1

La forma y dimensiones se detallan en la figura 1

PIEZA Nº 1 8 (u)

Figura 1

PIEZA Nº 2 UNIONES ARISTAS 12 unidades

La longitud es ligeramente inferior a la de la arista a_8 = 89,8 mm. La tomamos igual a 88 mm.

La forma y dimensiones se representan en la figura 2



Figura 2

PIEZA Nº 2 12 (u)

Figura 2



2) TETRAEDRO REGULAR CONVEXO DE CARAS VACIADAS, EN EL CUAL ESTÁ INSCRITO EL OCTAEDRO 1)

Los vértices del octaedro 1), han de situarse en los puntos medios de las aristas del tetraedro. (marcar previamente dichos puntos).

Este tetraedro es igual al del modelo M-1,102, por lo que se compone de las siguientes piezas:

PIEZA Nº 3 CARAS SUPERFICIALES 4 unidades

Iguales a la pieza nº 1 (fig. 1) del modelo M-1,102

PIEZA Nº 4 UNIONES ARISTAS 6 unidades

Iguales a la pieza nº 2 (fig. 2) del modelo M-1,102

---

3) CUATRO TETRAEDROS REGULARES DE CARAS VACIADAS, Y ARISTA $a_4 = a_8$.

Estos cuatro tetraedros son los que se obtienen en el conjugado del 1) al ser cortados por las caras de aquél en los puntos



medio de éste. Para su construcción se precisan las siguientes piezas:

PIEZA Nº 5 — DESARROLLO DE LAS TRES CARAS LATERALES EN CADA VERTICE — 4 unidades

89.8
89.8
89.8
4
4
4
4
4
4
89.8
89.8

Figura 3

PIEZA Nº 5 — 4 (u)

Figura 3

PIEZA Nº 6 — UNIONES ARISTAS — 12 unidades

La forma y dimensiones se detallan en la figura 4.

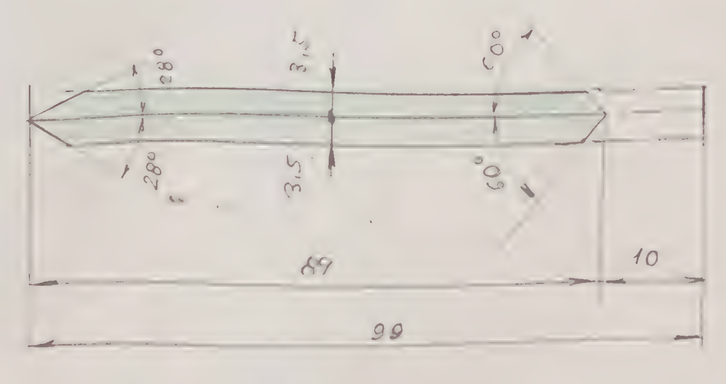


Figura 4

PIEZA Nº 6 — 12 (u)

Figura 4

Variante del modelo M-19.1

MODELO CORPÓREO EN EL QUE SE PONE DE MANIFIESTO QUE EL SÓLIDO COMÚN DE LA INTERSECCIÓN DE DOS TETRAEDROS REGULARES CONVEXOS, CONJUGADOS POR SUS ARISTAS, ES UN

"OCTAEDRO REGULAR CONVEXO"

Radio de la esfera circunscrita:

$r' = 110$ mm

	Ejercicios de construcción de poliedros MODELOS CORPÓREOS	Modelo M - 19.2

Variante del modelo M - 19.1

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo del octaedro regular convexo que se obtiene como sólido común en la intersección de dos tetraedros regulares conjugados por sus aristas, estudiado en el ejercicio G.E. 71 y representados en la lámina nº 19

El modelo que se estudia es una variante del modelo M-19.1, cuya variante consiste en sustituir el núcleo u "octaedro regular convexo de caras vaciadas" por un "octaedro regular convexo de caras macizas" y conservando los elementos restantes.

Así pues, este nuevo modelo estará formado por los siguientes elementos:

1) Octaedro regular convexo de caras macizas y arista $a_8 = \frac{a_4}{2}$

2) Tetraedro regular convexo de caras vaciadas y arista a_4, en el cual está inscrito el octaedro 1). (este tetraedro es igual al del modelo M-19.1).

3) Cuatro tetraedros regulares convexos de caras vaciadas y arista $a_4 = a_8$, que corresponden al tetraedro conjugado por las aristas del 2). (Estos cuatro tetraedros son iguales a los del modelo M-19.1).

Para la construcción de este modelo, se precisan las siguientes

Alvarez Febrero 1979



piezas:

1) OCTAEDRO REGULAR CONVEXO O SÓLIDO COMÚN DE LOS DOS TETRAEDROS REGULARES CONVEXOS, CONJUGADOS POR SUS ARISTAS, DE CARAS MACIZAS.

PIEZA Nº 1 CARAS SUPERFICIALES 8 unidades

Son triángulos equiláteros, y su forma y dimensiones se detallan en la figura 1.

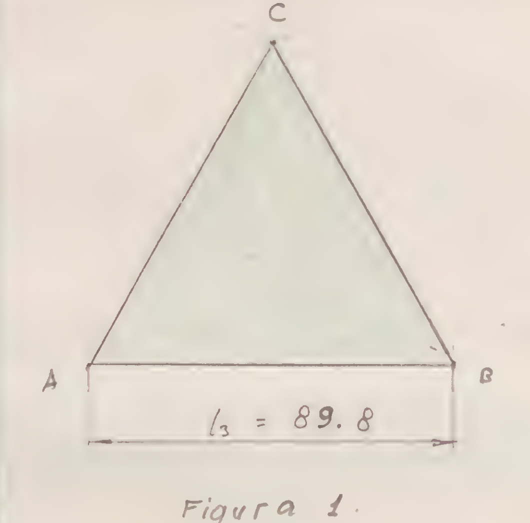


Figura 1.

PIEZA Nº 1 8 (u)

Figura 1

PIEZA Nº 2 REFUERZO NORMAL INTERIOR DE LAS CARAS SUPERFICIALES 8 unidades

Son triángulos equiláteros, (fig. 2) y su forma y dimensiones se deducen del triángulo ABC de la fig. 1

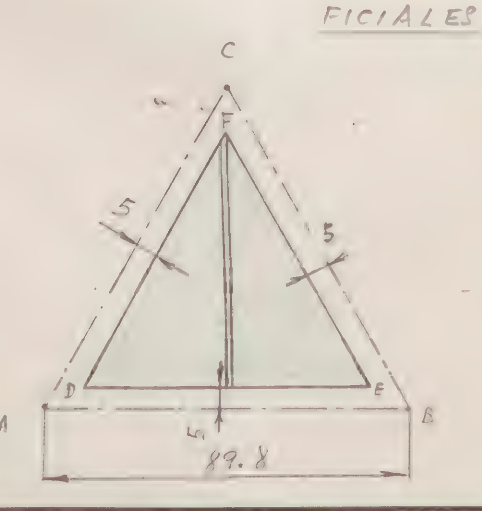


Figura 2

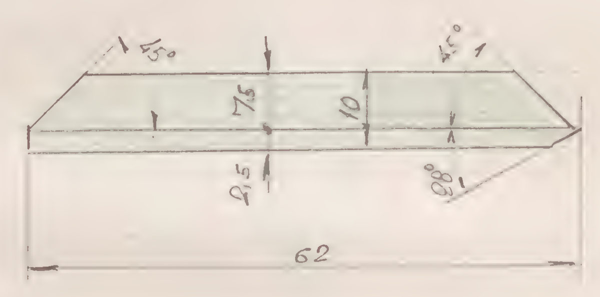
PIEZA Nº 2 8 (u)

Figura 2



PIEZA Nº 3 REFUERZO TRANSVERSAL DE LAS CARAS SUPERFICIALES 16 unidades

Se colocan en la dirección de las alturas del triángulo DEF (ver fig. 2). Su forma y dimensiones se detallan en la figura 3.



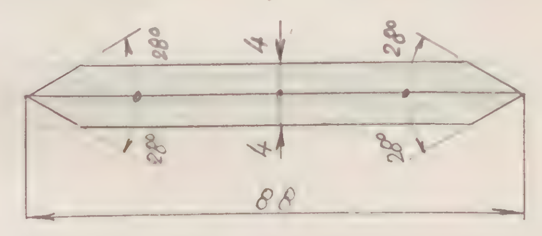
PIEZA Nº 3 16 (u)

Figura 3

Figura 3

PIEZA Nº 4 UNIONES ARISTAS 12 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 4

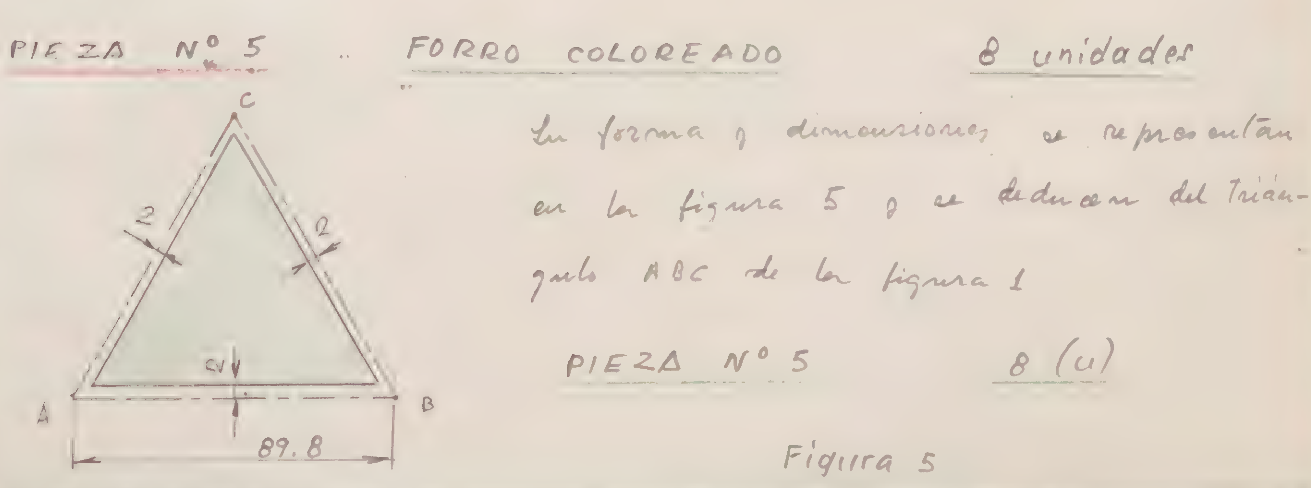


PIEZA Nº 4 12 (u)

Figura 4

Figura 4

PIEZA Nº 5 FORRO COLOREADO 8 unidades



Su forma y dimensiones se representan en la figura 5 y se deducen del triángulo ABC de la figura 1

PIEZA Nº 5 8 (u)

Figura 5

Figura 5

Alvarez Febrero 1979



2) TETRAEDRO REGULAR CONVEXO DE CARAS VACIADAS, EN EL CUAL ESTÁ INSCRITO EL OCTAEDRO 1)

Los vértices del octaedro 1), han de situarse en los puntos medios de las aristas del tetraedro; (marcar previamente dichos puntos

Este tetraedro es igual al del modelo M-1.102, por lo que se compone de las siguientes piezas:

PIEZA Nº 6 CARAS SUPERFICIALES 4 unidades.

Iguales a la pieza nº 1 (fig. 1) del modelo M-1.102

PIEZA Nº 7 UNIONES ARISTAS 6 unidades

Iguales a la pieza nº 2 (fig. 2) del modelo M-1.102

3) CUATRO TETRAEDROS REGULARES DE CARAS VACIADAS, Y ARISTA $a_4 = a_8$

Estos cuatro tetraedros son los que se obtienen en el conjugado del 1) al ser cortados por las caras de aquél en los pun-

UNE A 4-210 x 297



en medio de 45. Para su construcción se precisan las siguientes piezas:

PIEZA Nº 6 DESARROLLO DE LAS TRES CARAS LATERALES EN CADA VÉRTICE 4 unidades

Iguales a la pieza nº 5 (fig. 3) del modelo M-19.1

PIEZA Nº 7 UNIONES ARISTAS 12 unidades

Iguales a la pieza nº 6 (fig. 4) del modelo M-19.1

UNE A 4-210 x 297

Variante del modelo M - 19.2

MODELO CORPÓREO EN EL QUE SE PONE DE MANIFIESTO QUE EL SÓLIDO COMUN DE LA INTERSECCIÓN DE DOS TETRAEDROS REGULARES CONVEXOS, CONJUGADOS POR SUS ARISTAS, ES UN

"OCTAEDRO REGULAR CONVEXO"

Radio de la esfera circunscrita:

r' = 76.1 m m.

Variante del Modelo M-.19.2

ENUNCADO: Construir el modelo corpóreo del octaedro regular convexo que se obtiene como sólido común en la intersección de dos tetraedros regulares conjugados por sus aristas, estudiados en el ejercicio G.E. (?) y representados en la lámina nº 19

El modelo que se estudia tiene las mismas características que el estudiado en el modelo M-19.2, y varía tan solo en el radio de la esfera circunscrita a los mismos, que es de 76.1 mm en el actual y en el M-.19.2 era de 110 mm., siendo por consiguiente el estudiado actualmente de menor tamaño que el estudiado en el M-19.2.

El factor lineal o escala de reducción, será pues

$$\boxed{E} = \frac{76.1}{110} \cong 0.69\,\widehat{18}\ldots \cong \boxed{0.69\,18}$$

que aplicaremos en el cálculo de las magnitudes lineales del presente modelo. Así pues la arista a_4 de los dos tetraedros regulares convexos, conjugados, será:

$$a_4 = 179.6 \times 0.69\,\widehat{18} \cong 124.3 \text{ mm}$$

y la del octaedro en el mismo:

$$a_8 \cong \frac{124.3}{2} = 62.2 \text{ mm}$$

Alvarez   Febrero 1979



Este modelo está pues, formado por los siguientes cuerpos geométricos:

1) Octaedro regular convexo, de caras macizas y arista a_8 = 62.2 mm

2) Tetraedro regular convexo de caras vaciadas y arista a_4 = 124.3 mm, en el cual está inscrito el octaedro 1). (Este tetraedro es igual al del modelo M - 1.2)

3) Cuatro tetraedro regulares convexos de caras vaciadas y arista a_8 = 62.2 mm, que corresponden al tetraedro conjugado por las aristas del 2). (Estos cuatro tetraedros han de limitarse al desarrollo de tres caras laterales).

Para la construcción de este modelo, se precisan las siguientes piezas:

1) OCTAEDRO REGULAR CONVEXO, O SÓLIDO COMÚN DE LOS DOS TETRAEDROS REGULARES CONVEXOS CONJUGADOS POR SUS ARISTAS, DE CARAS MACIZAS.

PIEZA Nº 1 CARAS SUPERFICIALES 8 unidades

Son triángulos equiláteros, y su forma y dimensiones se detallan en la figura 1

UNE A 4-210 x 297

[signature] Febrero 1979



Modelo M-19.3

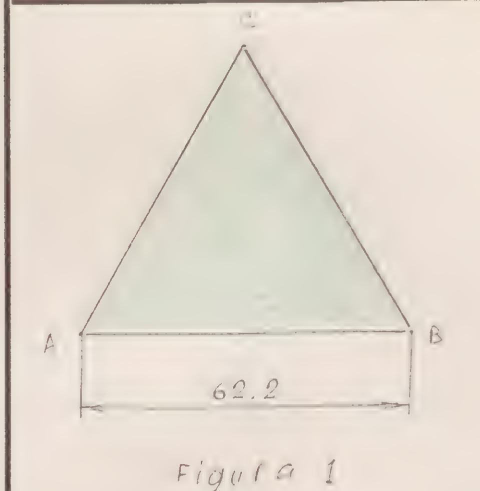


Figura 1

PIEZA Nº 1 8 (u)

Figura 1

PIEZA Nº 2 REFUERZO NORMAL INTERIOR DE LAS CARAS SUPERFICIALES 8 unidades

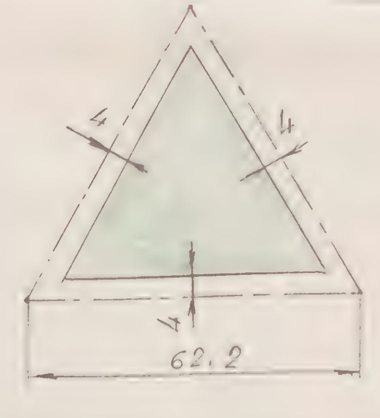


Figura 2

Son triángulos equiláteros (fig. 2), y su forma y dimensiones se deducen del triángulo ABC de la fig. 1

PIEZA Nº 2 8 (u)

Figura 2

PIEZA Nº 3 UNIONES ARISTAS 12 unidades

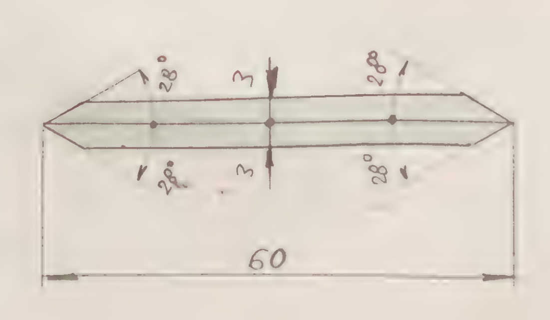


Figura 3

Su forma y dimensiones se representan en la figura 3.

PIEZA Nº 3 12 (u)

Figura 3

PIEZA Nº 4 FORRO COLOREADO 8 unidades

UNE A 4-210 x 297

Febrero 1979



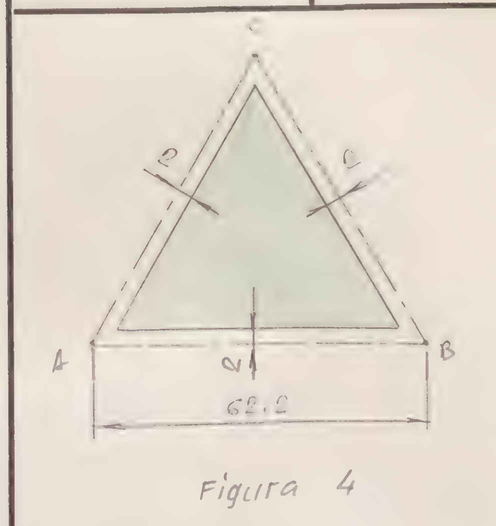


Figura 4

Su forma y dimensiones se representan en la figura 4, y se deducen de las del triángulo ABC de la figura 1

PIEZA Nº 4 3 (U)

2) TETRAEDRO REGULAR CONVEXO DE CARAS VACIADAS, EN EL CUAL ESTÁ INSCRITO EL OCTAEDRO 1)

Este tetraedro es igual al representado en el modelo M-1.2, por lo que, tendremos:

PIEZA Nº 5 CARAS SUPERFICIALES 4 unidades

Son iguales a las representadas en la figura 1 del modelo M-1.2.

PIEZA Nº 6 UNIONES ARISTAS 6 unidades

Son iguales a las representadas en la figura 2 del modelo M-1.2.

3) CUATRO TETRAEDROS REGULARES DE CARAS VACIADAS, Y ARISTA $a_4 = a_8$

Estos cuatro tetraedros son los que se obtienen en el conjugado -



Modelo M-19.3

del 1) al ser cortado por las caras de aquél en los puntos medios de éste. Para su construcción se precisan las siguientes piezas:

PIEZA Nº 7 DESARROLLO DE LAS TRES CARAS LATERALES EN CADA VÉRTICE 4 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 5

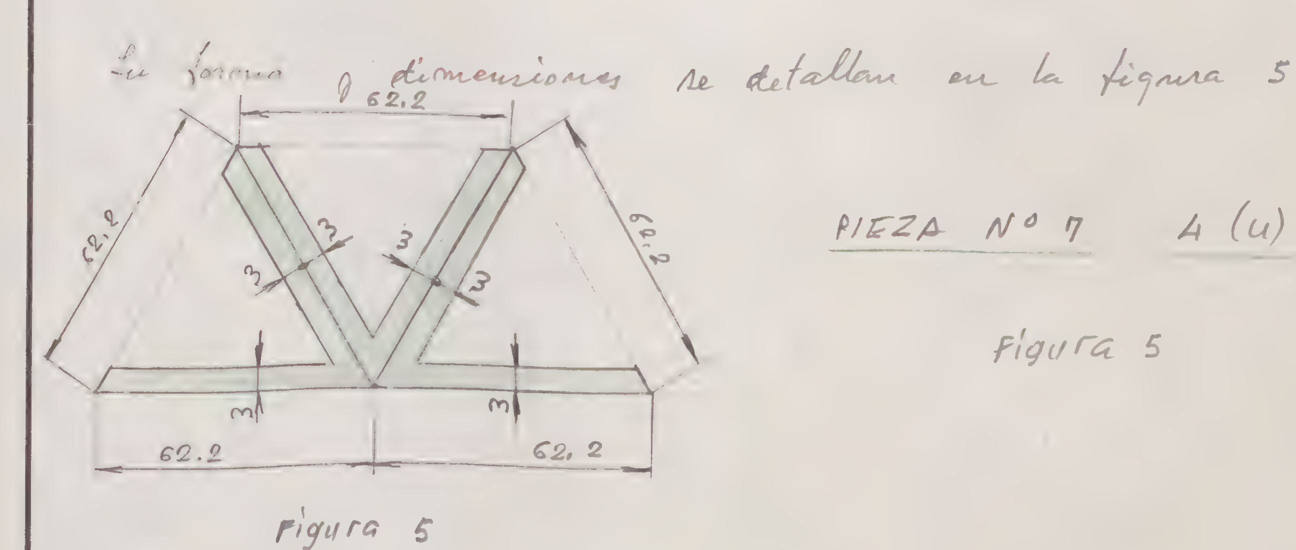
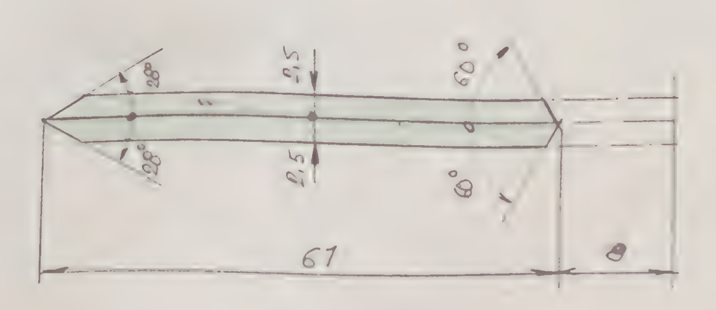


Figura 5

PIEZA Nº 8 UNIONES ARISTAS 12 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 6



PIEZA Nº 8 12 (U)

Figura 6

Figura 6

UNE A 4-210 x 297

Febrero 1979



POLIEDRO CÓNCAVO FORMADO POR LA INTERSECCIÓN DE UN EXAEDRO Y UN OCTAEDRO REGULARES, CONVEXOS Y CONJUGADOS POR SUS ARISTAS, INSCRITOS AMBOS EN LA MISMA ESFERA.

Radio de la esfera circunscrita:

$r' = 110$ m m.

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo del poliedro cóncavo obtenido por la intersección de un exaedro y un octaedro regulares, convexos y conjugados por sus aristas, inscritos ambos en la misma esfera.

1. GENERALIDADES

Un exaedro y un octaedro regulares y convexos, inscritos ambos en una misma esfera, se dicen que son conjugados por sus aristas, cuando los vértices de cada uno de ellos están situados en las proyecciones desde el centro de la esfera común, y sobre ésta, de los centros de las caras del otro.

Las aristas de ambos poliedros se cruzan perpendicularmente dos a dos. Los ángulos sólidos que se forman en los vértices del octaedro, atraviesan las caras del exaedro, de forma que los radios de la esfera que pasan por dichos vértices, cortan perpendicularmente a las caras del exaedro

El modelo M-23.1, que estudiamos ahora, está formado por los dos mencionados poliedros regulares conjugados, y construidos ambos con sus caras macizas. Dicho poliedro común, ha sido estudiado en el ejercicio G.E. nº ? y representado en la lámina nº 23.



2. CÁLCULOS DATO: Radio "r'" de la esfera circunscrita común $r' = 110$ mm

De lo expuesto anteriormente se deduce que cada cara del exaedro regular contiene a la base cuadrada de una pirámide cuadrangular regular, cuyas caras laterales son triángulos equiláteros. La altura "h" de estas pirámides es la diferencia entre el radio "r'" de la esfera circunscrita común, y el radio "r_{ei}^6" de la esfera inscrita al exaedro regular, o sea

$$h = r' - r_{ec}^6 \qquad (1)$$

La arista a_6 del exaedro regular inscrito en la esfera común, se deduce de la fórmula nº ? del ejercicio 2.E. ? en la que se relaciona el radio r_{ec}^6 de la esfera circunscrita al exaedro regular convexo, con la arista a_6 del mismo, o sea:

$r_{ec}^6 = r' = 110 = \frac{\sqrt{3}}{2} a_6$ en la que despejando a_6, tendremos:

$$a_6 = \frac{2}{\sqrt{3}} r' = \frac{2\sqrt{3}}{3} r' \cong 1,15\ 47\ 00\ 53\ 9 \ldots \times 110 \cong 127,01\ 70\ 59\ 3 \ldots \text{mm} \cong$$

$$\cong 127 \text{ mm} \qquad (2)$$

El radio "r_{ei}^6" de la esfera inscrita en el exaedro regular, es igual a la mitad de su arista, o sea:

$$r_{ei}^6 = \frac{a_6}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} r' \qquad (3)$$

UNE A 4-210 x 297

Calvarro Febrero 1979



		Modelo M-23.1

La altura "h" de la pirámide cuadrangular, será [ver fórmulas (1) y (3)]

$$\boxed{h} = r' - r^{6}_{ec} = r' - \frac{\sqrt{3}}{3} r' = \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) r' = \frac{3-\sqrt{3}}{3} r' = \frac{3-\sqrt{3}}{3} \times 110 \cong$$

$$\cong 0,42\ 26\ 49\ 73\ 1\ldots \times 110 = \boxed{46,5 \text{ mm}} \qquad (4)$$

La arista de la pirámide cuadrangular, se deduce de la figura 1, de la que se obtiene:

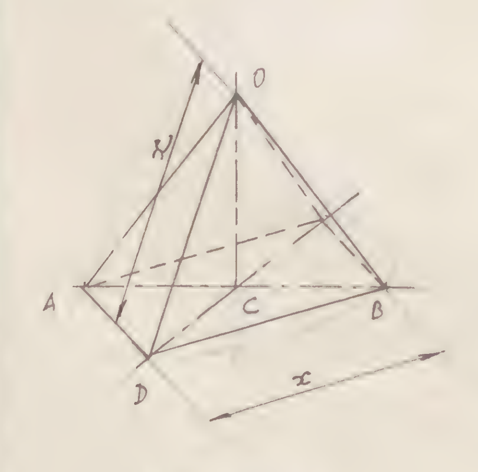


Figura 1

$$\overline{OD} = \overline{AD} = \overline{DB} = x$$

$$\overline{OC} = h = \frac{3-\sqrt{3}}{3} r'$$

$$\overline{AC} = \overline{DC} = \overline{CB} = \frac{\sqrt{2}}{2} x$$

$$\overline{OD} = x = \sqrt{\overline{OC}^2 + \overline{DC}^2} = \sqrt{\left(\frac{3-\sqrt{3}}{3} r'\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} x\right)^2}$$

de donde: $x^2 = \left(\frac{3-\sqrt{3}}{3} r'\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} x\right)^2$ ∴

∴ $x^2 = \left(\frac{3-\sqrt{3}}{3} r'\right)^2 + \frac{1}{2} x^2$ ∴ $x^2 - \frac{1}{2} x^2 = \left(\frac{3-\sqrt{3}}{3} r'\right)^2$ ∴

$\frac{1}{2} x^2 = \left(\frac{3-\sqrt{3}}{3} r'\right)^2$ ∴ $\frac{1}{\sqrt{2}} x = \frac{3-\sqrt{3}}{3} r'$ y de aquí:

$$\boxed{x = OD} = \frac{3-\sqrt{3}}{3} r' : \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{3} r' \cong 0,59\ 77\ 16\ 98\ 1\ldots \times 110 \cong$$

$$\boxed{= 65,7 \text{ mm}} \qquad (5)$$

El radio r^{4}_{ec} de la circunferencia circunscrita al cuadrado

de la base de la pirámide, será:

$$r_{ec}^{4} = \overline{AC} = \overline{CB} = \overline{CD} = \frac{\sqrt{2}}{2}\, x = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{6}}{3}\, r' =$$

$$= \frac{6 - \sqrt{12}}{6}\, r' = \frac{6 - 2\sqrt{3}}{6}\, r' = \frac{3 - \sqrt{3}}{3}\, r'$$ igual valor que el

obtenido en la formula (A) por lo que tendremos:

(6) $$\boxed{r_{ec}^{4} = h} = \frac{3 - \sqrt{3}}{3}\, r' \cong 0{,}42\ 26\ 49\ 73\ 1\ldots \times 110 \cong \boxed{46.5 \text{ mm}}$$

De la formula (6) se deduce la notable propiedad siguiente:

"El radio r_{ec}^{4} de la circunferencia circunscrita al cuadrado base de las pirámides del octaedro, es igual a la altura de la misma"



		Modelo M-23.1

3) CONSTRUCCIÓN

3.1) EXAEDRO REGULAR CONVEXO

De acuerdo con los cálculos anteriores, para la construcción del exaedro regular convexo, se precisan las siguientes piezas:

PIEZA Nº 1 CARAS SUPERFICIALES 6 unidades

Son cuadradas, cuyas forma y dimensiones se detalla en la figura 1, en la que se representa también la situación de la base de la pirámide cuadrada regular.

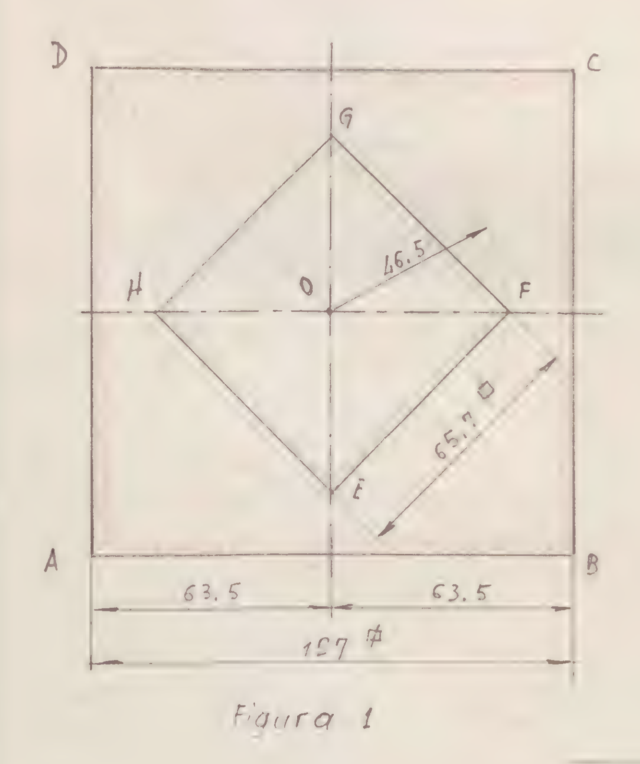


Figura 1

PIEZA Nº 1 6 (U)

Figura 1

PIEZA Nº 2 REFUERZO NORMAL DE LAS CARAS SUPERFICIALES 6 unidades

Su forma y dimensiones se representan en la figura 2, y se deducen de las del cuadrado ABCD de la figura 1

UNE A 4-210 x 297

Tavares Enero 1979

A, B, C, D; 5; 5; 5; 5; 117; 127

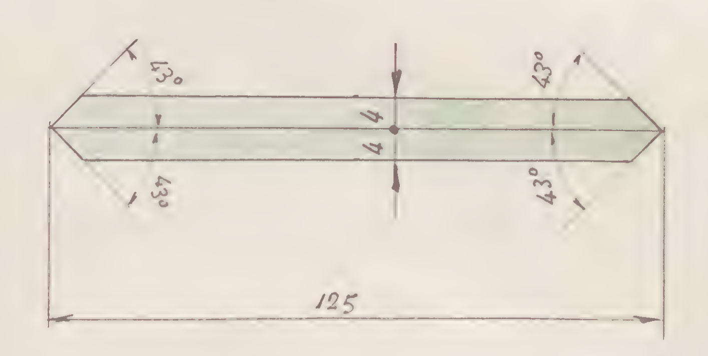
PIEZA Nº 2 — 6 (u)

Figura 2

Figura 2

PIEZA Nº 3 — UNIONES ARISTAS — 12 unidades

Su forma y dimensiones se representan en la figura 3.



PIEZA Nº 3 — 12 (u)

Figura 3

Figura 3

PIEZA Nº 4 — FORRO COLOREADO DE LAS CARAS SUPERFICIALES

6 unidades

Su forma y dimensiones se representan en la figura 4, y se deducen de las de los cuadrados ABCD y EFGH de la figura 1.



Modelo M- 23.1

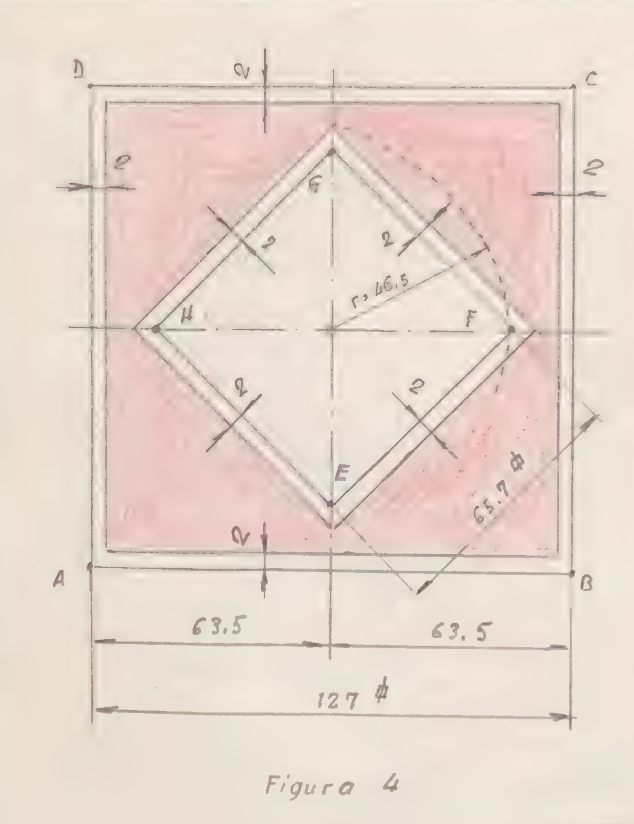


Figura 4

PIEZA Nº 4 6 (u)

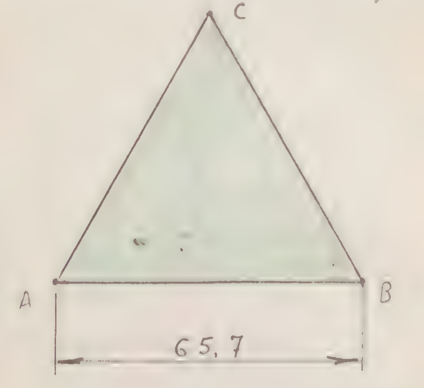
Figura 4

3.2 ZONA APARANTE DEL OCTAEDRO REGULAR CONVEXO.

PIEZA Nº 5 CARAS SUPERFICIALES.- SEIS PIRÁMIDES CUADRADAS REGULARES DE CUATRO CARAS LATERALES

24 unidades

La forma y dimensiones de las caras laterales, se representan en la figura 5, y son triángulos equiláteros.



PIEZA Nº 5 24 (u)

Figura 5

Figura 5

PIEZA Nº 6 FORRO COLOREADO DE LAS CARAS LATERALES.- 24 unidades



Modelo M - 23.1

Su forma y dimensiones se representan en la figura 6, y se deducen de las del triángulo equilátero ABC de la figura 5

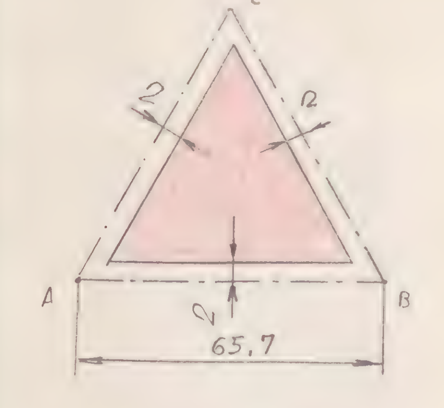


Figura 6

PIEZA Nº 6 24 (u)

Figura 6

PIEZA Nº 7 UNIONES ARISTAS CARAS LATERALES 48 unidades

Su forma y dimensiones se representan en la figura 7.

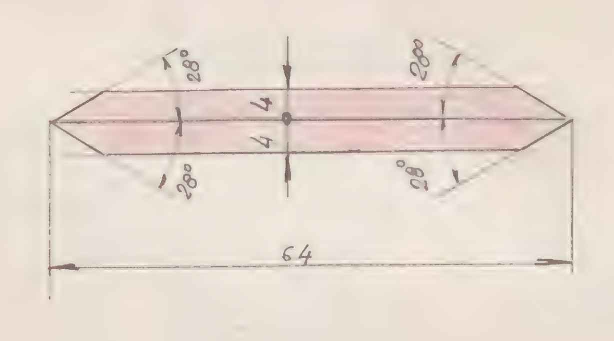


Figura 7

PIEZA Nº 7 48 (u)

Figura 7

PIEZA Nº 8 REFUERZO NORMAL DE LAS CARAS LATERALES

24 unidades

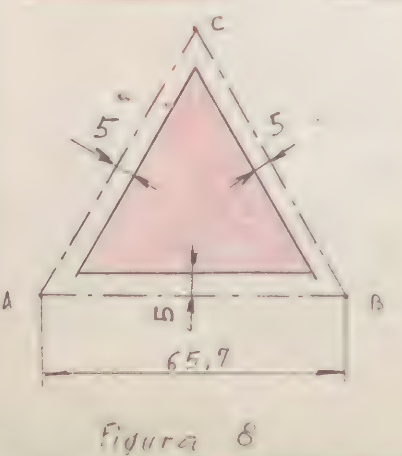


Figura 8

Su forma y dimensiones se representan en la figura 8 y se deducen de las del triángulo equilátero de la figura 5.

PIEZA Nº 8 24 (u) Fig. 8

UNE A 4-210 x 297

Enero 1977

PATRONES Modelo M-23.1

PIEZA Nº 3 12 (u)

Figura 3

PIEZA Nº 2

6 (u)

Fig. 2

PIEZA Nº 6

24 (u)

Fig. 6

PIEZA Nº 8

24 (u)

Fig. 8

PIEZA Nº 7 48 (u)

Figura 7

PIEZA Nº 5

24 (u)

Fig. 5

PATRONES

Modelo M-2.93



PIEZA Nº 4

6 (u) x2

Figura 4

Variante del modelo M-23.1

POLIEDRO CÓNCAVO FORMADO POR LA INTERSECCIÓN DE UN EXAEDRO Y UN OCTAEDRO REGULARES CONVEXOS Y CONJUGADOS POR SUS ARISTAS, INSCRITOS AMBOS EN LA MISMA ESFERA.

Radio de la esfera circunscrita

r' = 76.1 mm.

Variante del modelo M - 23.1

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo del poliedro cóncavo obtenido por la intersección de un exaedro y un octaedro regulares, convexos y conjugados por sus aristas, inscritos ambos en la misma esfera.

El modelo que se estudia, tiene las mismas características que el estudiado en el modelo M - 23.1, y varía tan sólo en el radio de la esfera circunscrita a los mismos, que es de 76,1 mm en el actual, y en el M-23.1 era de 110 mm, siendo por consiguiente el estudiado actualmente de menor tamaño que el estudiado en el M - 23.1.

El factor lineal o escala de reducción será pues:

$$E = \frac{76.1}{110} = 0,69\widehat{18}\ldots \cong \boxed{0,69\ 18} \qquad (1)$$

que aplicaremos al cálculo de las magnitudes lineales de este modelo, en función de las calculadas en el M- 23.1

Para la construcción de este modelo, se precisarán las siguientes piezas:

1. EXAEDRO REGULAR CONVEXO

PIEZA Nº 1 CARAS SUPERFICIALES 6 unidades

UNE A 4-210 x 297



Son cuadradas, cuyas formas y dimensiones se detallan en la figura 1, en la que se representa también la situación de la base de la pirámide cuadrada regular

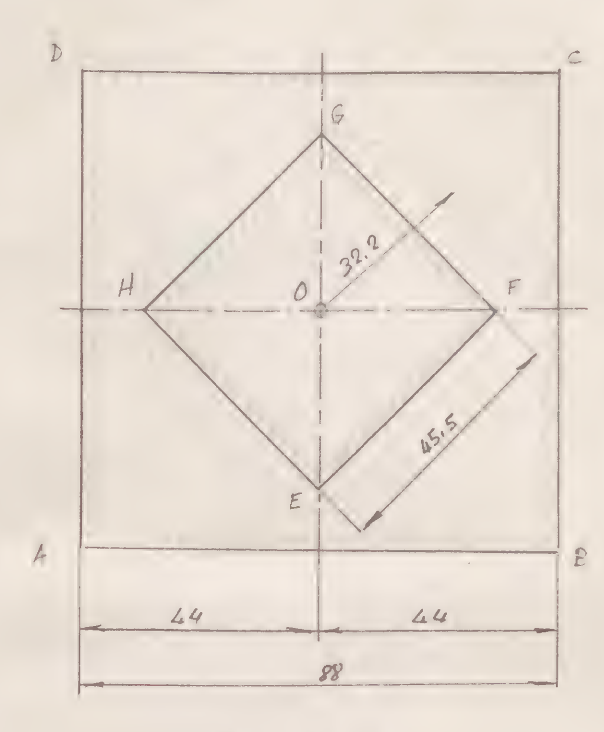


Figura 1

Las dimensiones calculadas en función de las de la fig. 1 del modelo M-23.1, son las siguientes:

46.5 ×	0.6918	= 32.2
65.7 ×	"	= 45.5
63.5 ×	"	= 44.0
127.0 ×	"	= 88.0

PIEZA Nº 1 6 (u)

Figura 1.

PIEZA Nº 2 REFUERZO NORMAL DE LAS CARAS SUPERFICIALES

6 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 2, y se deducen de las del cuadrado ABCD de la figura 1

D C
4 4 4
4
A B
88

Figura 2

PIEZA Nº 2 6 (u)

Figura 2



		Modelo M-23.2

PIEZA Nº 3 UNIONES ARISTAS 12 unidades

La forma y dimensiones se representan en la figura 3

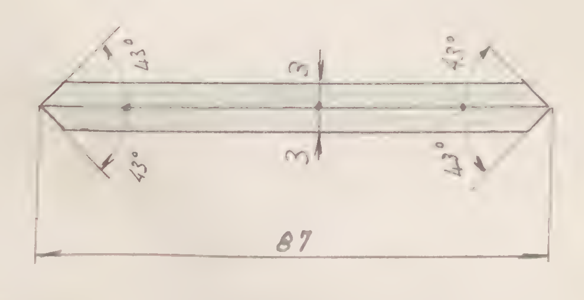


Figura 3

PIEZA Nº 3 12 (u)

Figura 3

PIEZA Nº 4 FORRO COLOREADO DE LAS CARAS SUPERFICIALES

6 unidades

La forma y dimensiones se representan en la figura 4, y se deducen de los de los cuadrados ABCD y EFGH de la figura 1.

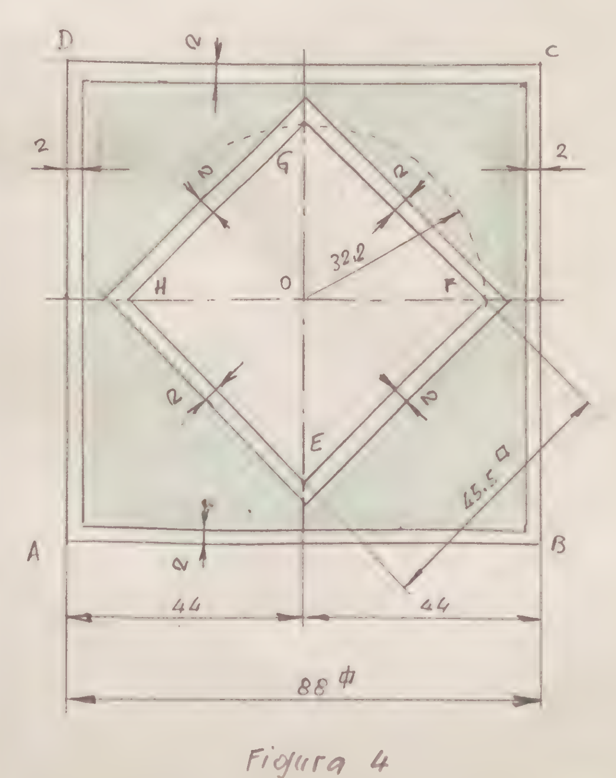


Figura 4

PIEZA Nº 4 6 (u)

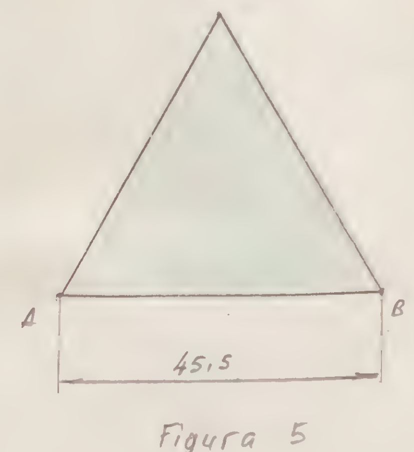
Figura 4



2. OCTAEDRO REGULAR CONVEXO

PIEZA Nº 5 CARAS SUPERFICIALES DE LAS SEIS PIRÁMIDES APARENTES 24 unidades

Son triángulos equiláteros, cuya forma y dimensiones se detallan en la figura 5



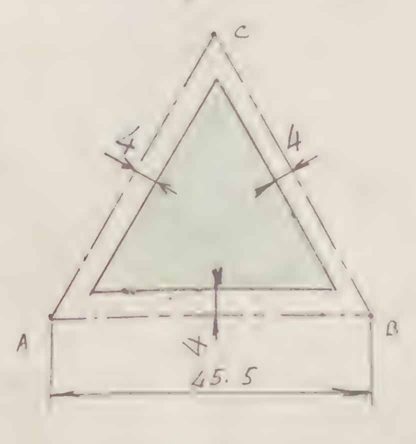
PIEZA Nº5 24 (u)

Figura 5

Figura 5

PIEZA Nº 6 REFUERZO NORMAL DE LAS CARAS LATERALES DE LAS PIRÁMIDES APARENTES 24 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 6, y se deducen de las del triángulo ABC de la figura 5



PIEZA Nº6 24 (u)

Figura 6

Figura 6

PIEZA Nº 7 UNIONES ARISTAS CARAS LATERALES 48 unidades

Su forma y dimensiones se representan en la figura 7



Modelo X - 23.3

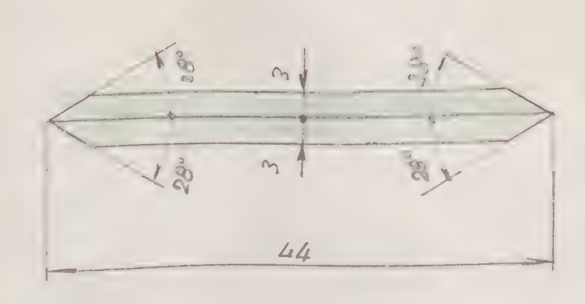


Figura 7

PIEZA Nº 7   48 (U)

Figura 7

PIEZA Nº 8   FORRO COLOREADO DE LAS CARAS LATERALES

24 unidades

Su forma y dimensiones se representan en la figura 8, y se deducen de las del triángulo ABC de la figura 5

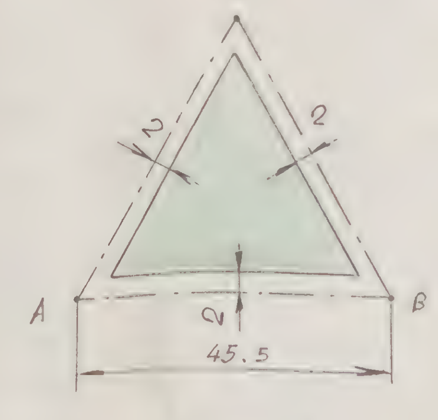


Figura 8

PIEZA Nº 8   24 (U)

Figura 8

UNE A 4-210 x 297

TAlvarez   Febrero 1979



Variante del modelo M-23.2

POLIEDRO CÓNCAVO FORMADO POR LA INTERSECCIÓN DE UN EXAEDRO Y UN OCTAEDRO REGULARES CONVEXOS Y CONJUGADOS POR SUS ARISTAS, INSCRITOS AMBOS EN LA MISMA ESFERA.

Radio de la esfera circunscrita:

$r' = 76.1$ m m

Variante del modelo M- 23.2

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo del poliedro cóncavo obtenido por la intersección de un exaedro y un octaedro regulares, convexos y conjugados por sus aristas, inscrito ambos en la misma esfera.

El modelo que se estudia, tiene las mismas características y dimensiones que el estudiado en el modelo M-23.2, con las variantes de ser:

1) Las caras del exaedro son macizas y pintadas

2) Las caras del octaedro son huecas y pintadas

Para la construcción de este modelo, se precisan las siguientes piezas:

1. EXAEDRO REGULAR CONVEXO

PIEZA Nº 1 CARAS SUPERFICIALES 6 unidades

Son iguales a las de la fig. 1 del modelo M-23.2

PIEZA Nº 2 REFUERZO NORMAL DE LAS CARAS SUPERFICIALES. 6 unidades

Son iguales a las de la figura 2 del modelo M-23.2

UNE A 4-210 x 297

PIEZA Nº 3 REFUERZO TRANSVERSAL DE LAS CARAS SUPERFICIALES

24 unidades
(simétricas 2 a 2)

Se colocan en la posición indicada en la figura 3

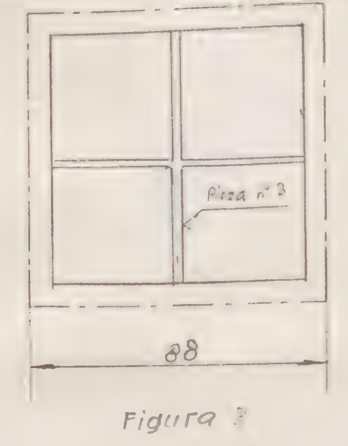


Figura 3

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 4

PIEZA Nº 3 24(u)

Figura 4

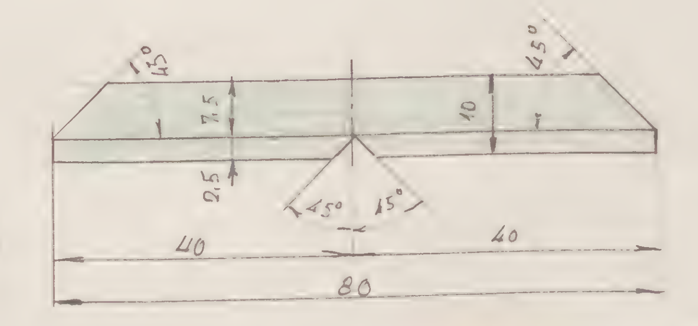


Figura 4

PIEZA Nº 4. UNIONES ARISTAS 12 unidades

Son iguales a las de la figura 3 del modelo M-23.2

---

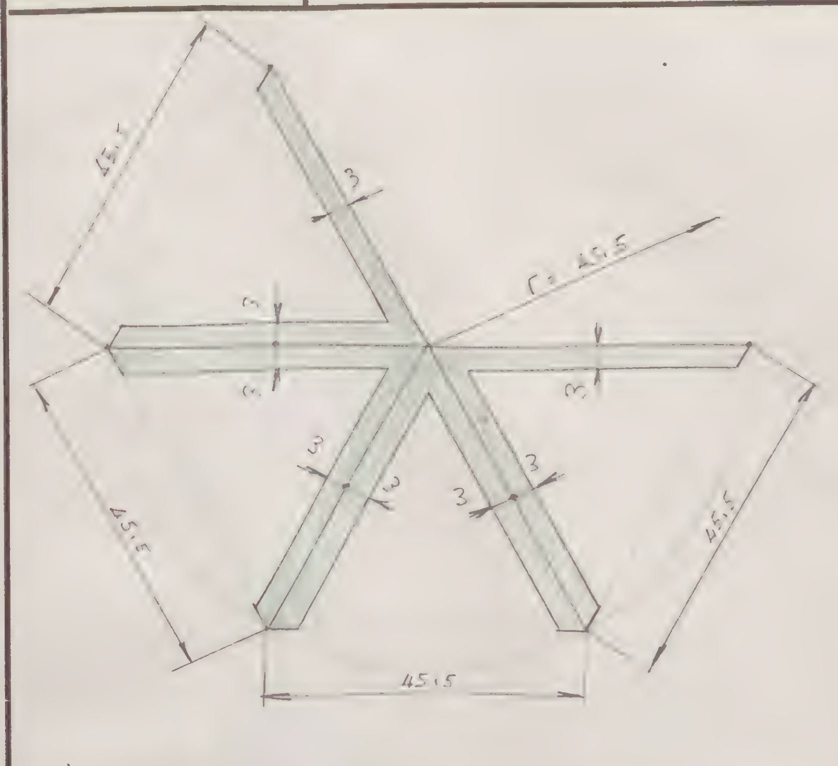
2) "OCTAEDRO" REGULAR CONVEXO

PIEZA Nº 5 DESARROLLO DE LAS CUATRO CARAS LATERALES DE LAS PIRÁMIDES APARENTES 6 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 5.

UNE A 4-210 x 297





PIEZA Nº 5

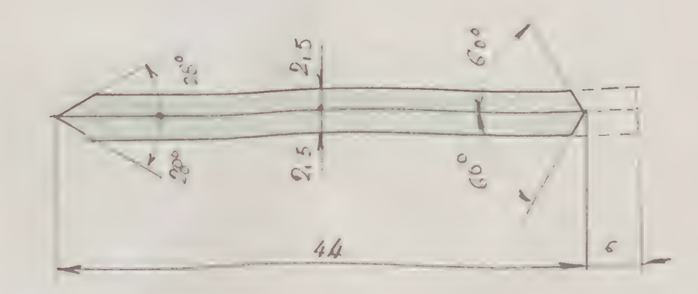
6 (u)

Figura 5

Figura 5

PIEZA Nº 6 UNIONES ARISTAS CARAS LATERALES DE LAS PIRÁMIDES APARENTES 24 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 6



PIEZA Nº 6 24 (u)

Figura 6

Figura 6

UNE A 4-210 x 297



	MODELOS CORPÓREOS	Modelo M - 23. 4

Variante del modelo M - 23. 3

POLIEDRO CÓNCAVO FORMADO POR LA INTERSECCIÓN DE UN EXAEDRO Y UN OCTAEDRO REGULARES CONVEXOS Y CONJUGADOS POR SUS ARISTAS, INSCRITOS AMBOS EN LA MISMA ESFERA.

Radio de la esfera circunscrita:

r' = 76.1 mm.

UNE A 4-210 x 297

Modelo M - 23.4

Variante del modelo M 23.3

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo del poliedro cóncavo obtenido por la intersección de un exaedro y un octaedro regulares, convexos y conjugados por sus aristas, inscritos ambos en la misma esfera.

El modelo que se estudia, tiene las mismas características y dimensiones que el estudiado en el modelo M - 23.4, con las siguientes variantes:

1) Las caras laterales del exaedro regular, así como las contiguas al sólido común son de caras macizas y pintadas.

2) Las caras laterales del octaedro regular son huecas y pintadas.

Para la construcción de este modelo, se precisan las siguientes piezas:

1. EXAEDRO REGULAR CONVEXO

PIEZA Nº 1 CARAS SUPERFICIALES 6 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 1

UNE A 4-210 x 297

Febrero 1979



Modelo M - 23.4

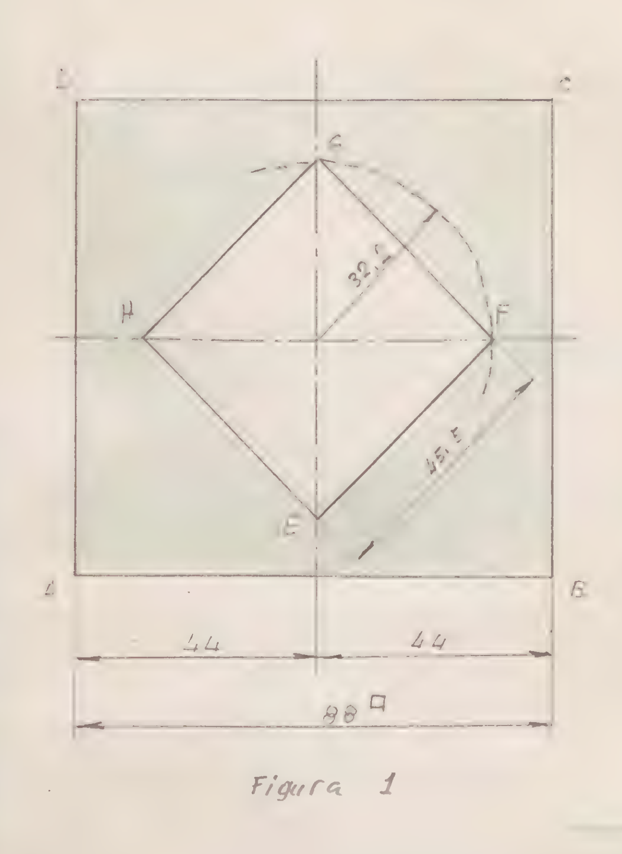


Figura 1

PIEZA Nº 1 6 (U)

Figura 1

PIEZA Nº 2 REFUERZO NORMAL INTERIOR 6 unidades

La forma y dimensiones se detallan en la figura 2 y se deducen de los contornos AB-CD y EFGH de la figura 1

Pieza 3
D
C
Pieza 5
Pieza 6
Pieza 3
Pieza 3
G
4
4
H
F
4
4
4
4
Pieza 2
E
Pieza 5
Pieza 6
A
B
Pieza 3
88□

Figura 2

PIEZA Nº 2 6 (U)

Figura 2

UNE A 4-210 x 297



PIEZA Nº 3 UNIONES ARISTAS 12 unidades

Su forma y dimensiones están detalladas en la figura 3. Su colocación se indica en la figura 2.

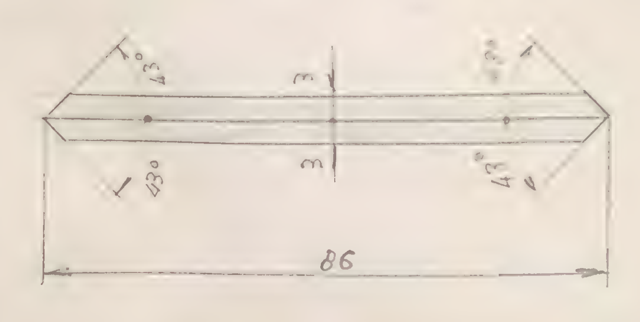


Figura 3

PIEZA Nº 3 12 (U)

Figura 3

PIEZA Nº 4 CARAS SUPERFICIALES CONTIGUAS AL OCTAEDRO

8 unidades

Pieza 5
Pieza 6
Pieza 7
Pieza 7
Pieza 4
Pieza 7
Pieza 6
Pieza 6
E D F C K J L I G H A B
4 4 4 4 4 4
45.5 17.6 45.5
107.6

Figura 4

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 4 y se corresponden con las del polígono convexo ABCDEFA.

PIEZA Nº 4 8 (U)

Figura 4

UNE A 4-210 x 297

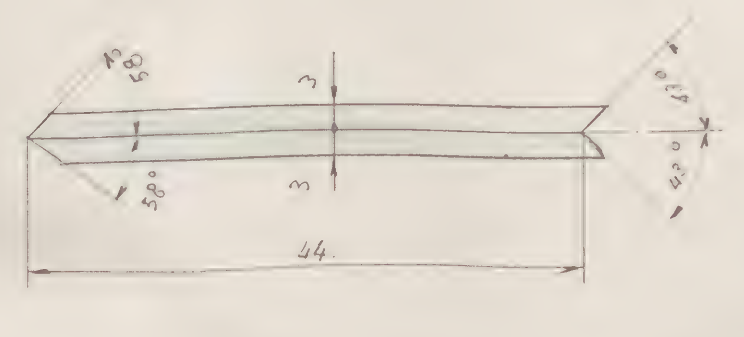
[illegible] Febrero 1979

PIEZA Nº 5 REFUERZO NORMAL DE LAS CARAS SUPERFICIALES CONTIGUAS AL OCTAEDRO 8 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 4, y se corresponden con las del polígono convexo GHIJKLG.

PIEZA Nº 6 UNIONES ARISTAS EN CARAS SUPERFICIALES CONTIGUAS AL OCTAEDRO 24 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 5; su posición se representa en las figuras 3 y 4

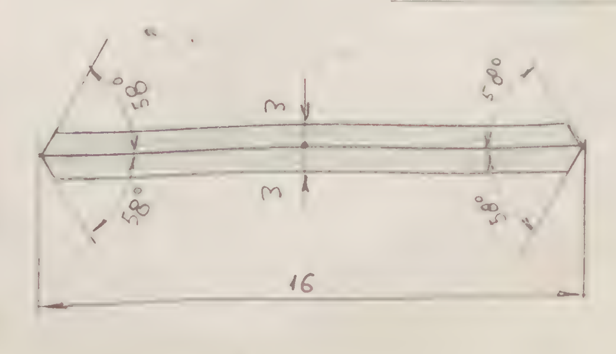


PIEZA Nº 6 24 (u)

Figura 5

Figura 5

PIEZA Nº 7 UNIONES ARISTAS EN CARAS SUPERFICIALES CONTIGUAS AL OCTAEDRO 12 unidades



Su forma y dimensiones se detallan en la figura 6; su posición se representa en las figuras 3 y 4

PIEZA Nº 7 12 (u)

Figura 6

Figura 6

UNE A 4-210 x 297

Febrero 1979



2. OCTAEDRO REGULAR CONVEXO

Este octaedro es igual al representado en el modelo M-3.2, por lo que tendremos:

PIEZA Nº 8 CARAS LATERALES (vaciados) 8 unidades

Iguales a las de la pieza nº 1 (fig. 1) del modelo M-3.2

PIEZA Nº 9 UNIONES ARISTAS 12 unidades

Iguales a las de la pieza nº 2 (fig. 2) del modelo M-3.2



POLIEDRO CÓNCAVO DERIVADO DE UN OCTAEDRO REGULAR, OBTENIDO AL PROYECTAR DESDE EL CENTRO DE LA ESFERA CIRCUNSCRITA A ÉSTE, Y SOBRE ELLA, LOS CENTROS DE CADA CARA, UNIENDO A CONTINUACIÓN ESTOS PUNTOS CON LOS VÉRTICES DEL TRIÁNGULO DE DICHA CARA ————

Radio de la esfera circunscrita:

r' = 110 m m.

	Ejercicios de construcción de poliedros. MODELOS CORPÓREOS	Modelo M-27.1

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo del poliedro cóncavo derivado de un octaedro regular, obtenido al proyectar desde el centro de la esfera circunscrita a éste, y sobre ella, los centros de cada cara, uniendo a continuación estos puntos con los vértices del triángulo de dicha cara.

Este poliedro ha sido estudiado en el ejercicio G.E. , y representado en la lámina 27. Dicho poliedro es cóncavo, y de las siguientes características

Número de caras	C = 24
Número de vértices	V = 14
Número de aristas	A = 36

Las caras son todas iguales y su forma es la de un triángulo isósceles cuya base o lado desigual es la arista a_8 del octaedro generador.

Como único dato para su construcción, tenemos el siguiente:

DATO: "Radio "r'" de la esfera circunscrita al octaedro dado:

$r' = 110$ mm

Para la construcción de este modelo, de caras macizas, se

UNE A4 210 x 297

Modelo M - 27.1

precisan las siguientes piezas:

PIEZA Nº 1 CARAS SUPERFICIALES 24 unidades

Su forma y dimensiones se representan en la figura 1 (triángulo ABC).

Figura 1

$101.1 = b$ $101.1 = a$ C A B $155.6 = c$

PIEZA Nº 1 24 (u)

Figura 1

El lado $\overline{AB}$ es igual a la arista a_8 del octaedro regular generador. Su valor se obtiene por la fórmula (ver ejercicio G.E. ... lám. 27)

$$\boxed{AB} = \sqrt{2} \times r_{ec}^{8} = 1,41\,42\,13\,56\,2 \ldots \times 110 \cong \boxed{155.6\ mm}$$

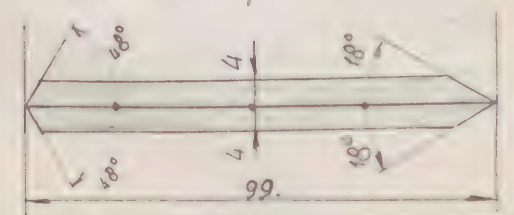
Los lados $\overline{AC} = \overline{CB}$, se obtienen por la fórmula (ver ejercicio G.E. ... lám. 27)

$$\boxed{\overline{AC} = \overline{CB}} = \sqrt{\frac{6 - 2\sqrt{3}}{3}} \times r_{ec}^{8} = 0,91\,94\,01\,68\,7 \ldots \times 110 \cong \boxed{101.1\ mm}$$

PIEZA Nº 2 UNIONES ARISTAS EN LADOS "a" y "b" (fig. 1)

24 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 2.



PIEZA Nº 2 24 (u)

Figura 2

Figura 2

UNE A4 210 x 297

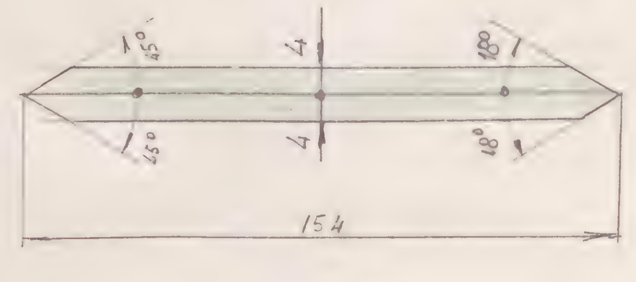
Febrero 1979

Modelo M - 27.1

PIEZA Nº 3 UNIONES ARISTAS EN LADOS "c" (fig. 1)

12 unidades

La forma y dimensiones se representan en la figura 3.



PIEZA Nº 3 12 (u)

Figura 3

Figura 3

PIEZA Nº 4 REFUERZO NORMAL INTERIOR 24 unidades

La forma y dimensiones se deducen de las del triángulo ABC de la figura 1, y se representan en la figura 4

C
5
5
5
A
B

PIEZA Nº 4 24 (u)

Figura 4

Figura 4

PIEZA Nº 5 FORRO COLOREADO 24 unidades

La forma y dimensiones se deducen de las del triángulo ABC de la figura 1, y se representan en la figura 5.

C
2
2
2
A
B

PIEZA Nº 5 24 (u)

Figura 5

Figura 5



PATRONES

Modelo M- 27,1

Variante del modelo M-27,1

POLIEDRO CÓNCAVO DERIVADO DE UN OCTAEDRO REGULAR CONVEXO, OBTENIDO AL PROYECTAR DESDE EL CENTRO DE LA ESFERA CIRCUNSCRITA A ÉSTE, Y SOBRE ELLA, LOS CENTROS DE CADA CARA, UNIENDO A CONTINUACIÓN ESTOS PUNTOS CON LOS VÉRTICES DEL TRIÁNGULO DE DICHA CARA

Radio de la esfera circunscrita:

$r' = 110$ m m.

Variante del modelo M-27.1

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo del poliedro cóncavo derivado de un octaedro regular, obtenido al proyectar desde el centro de la esfera circunscrita a éste, y sobre ella, los centros de cada cara, uniendo a continuación estos puntos con los vértices del triángulo de dicha cara.

Este modelo puede considerarse como una variante del modelo M-27.1.

La variante es la de construirlo con sus caras vaciadas en sustitución a las caras macizas del mencionado modelo M-27.1.

Para la construcción de este modelo, se precisan las siguientes piezas:

PIEZA Nº 1 CARAS SUPERFICIALES 24 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 1

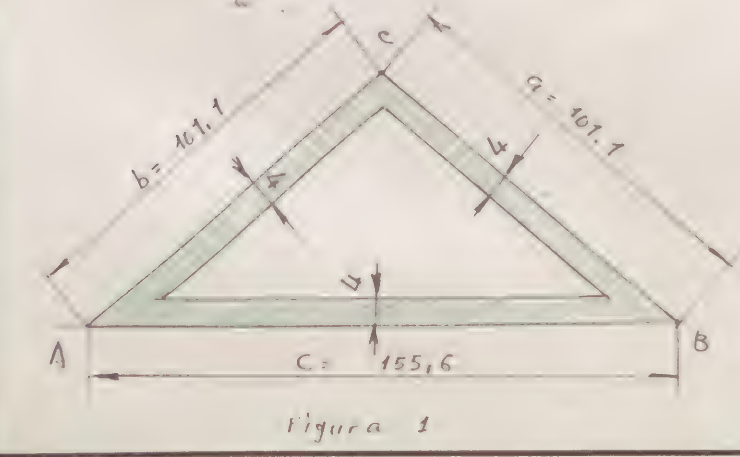


Figura 1

PIEZA Nº1 24 (u)

Figura 1

Febrero 1979

Modelo M-27.2

PIEZA Nº 2 UNIONES ARISTAS EN LADOS "a" Y "b" (fig. 1)

24 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 2

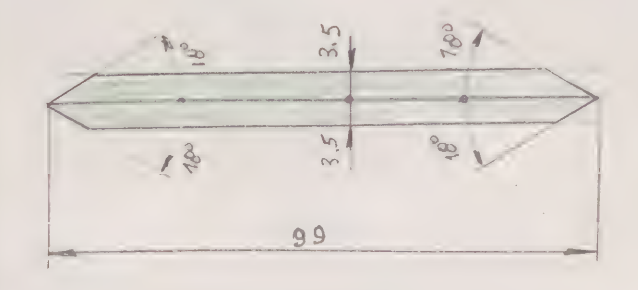


Figura 2

PIEZA Nº 2 24 (u)

Figura 2

PIEZA Nº 3 UNIONES ARISTAS EN LADOS "c" (fig. 1)

12 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 3.

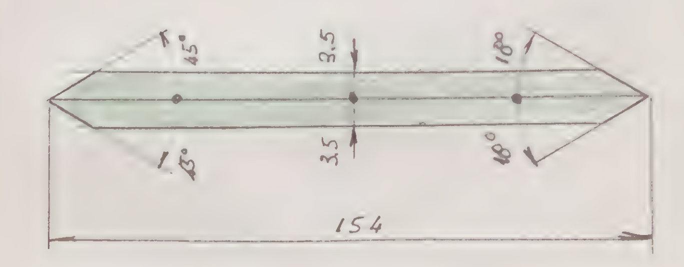


Figura 3

PIEZA Nº 3 12 (u)

Figura 3



MODELOS CORPÓREOS | Modelo M-27.3

Variante del modelo M-27.2

POLIEDRO CÓNCAVO DERIVADO DE UN OCTAEDRO REGULAR CONVEXO, OBTENIDO AL PROYECTAR DESDE EL CENTRO DE LA ESFERA CIRCUNSCRITA A ÉSTE, Y SOBRE ELLA, LOS CENTROS DE CADA CARA, UNIENDO A CONTINUACIÓN ESTOS PUNTOS CON LOS VÉRTICES DEL TRIÁNGULO DE DICHA CARA ——————

Radio de la esfera circunscrita:

$r' = 110$ mm

UNE A4 210 x 297

	Ejercicios de construcción de poliedros MODELOS CORPÓREOS	Modelo M - 27.3

Variante del modelo M - 27.2

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo del poliedro cóncavo derivado de un octaedro regular convexo, obtenido al proyectar desde el centro de la esfera circunscrita a éste, y sobre ella, los centros de cada cara, uniendo a continuación estos puntos con los vértices del triángulo de dicha cara.

En el modelo M - 27.2 todos los vértices de dicho poliedro están situados en su esfera circunscrita.

Si unimos dos a dos los vértices correspondientes a las proyecciones de los centros de las caras del octaedro generador, obtenemos un exaedro regular convexo, inscrito en la misma esfera.

El modelo que estudiamos ahora pone de manifiesto la propiedad anterior, aumentando en el modelo M - 27.2 las aristas del mencionado exaedro regular convexo, por lo que puede considerarse como una variante de dicho modelo.

Para la construcción de este modelo, son necesarias las siguientes piezas:

PIEZA Nº 1 CARAS SUPERFICIALES 24 unidades

Son de igual forma y dimensiones que las de la fig. 1 del modelo M - 27.2



PIEZA Nº 2 UNIONES ARISTAS EN LADOS "a" y "b"

24 unidades

Son de igual forma y dimensiones que las de la figura 2 del modelo M-27.2

PIEZA Nº 3 UNIONES ARISTAS EN LADOS "C"

12 unidades

Son de igual forma y dimensiones que las de la figura nº 3 del modelo M-27.2

PIEZA Nº 4 ARISTAS DEL EXAEDRO REGULAR CONVEXO

12 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 1; la longitud de dicha arista es la "a_6 = 127 mm" del modelo M-2.101. Radio de la esfera circunscrita r^6_{ec} = 110 mm.

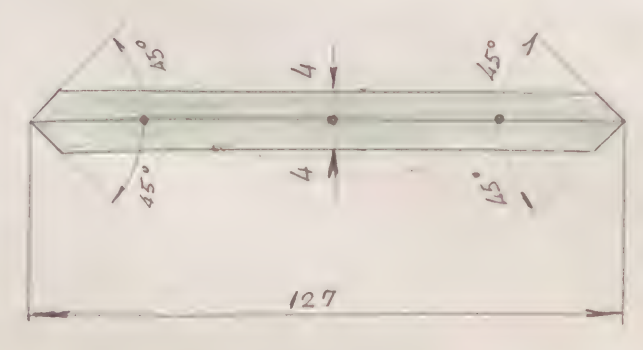


Figura 1

PIEZA Nº 4 12 (u)

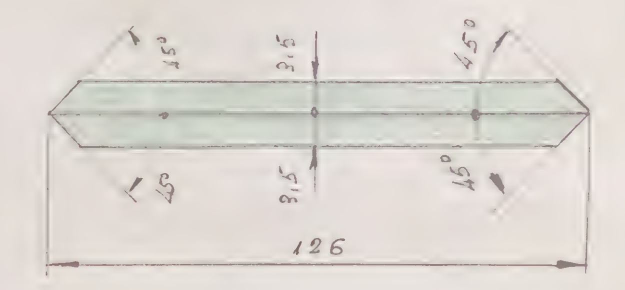
Figura 1



PIEZA Nº 5 REFUERZO ARISTAS EXAEDRO REGULAR CONVEXO

12 unidades

La forma y dimensiones se detallan en la figura 2



PIEZA Nº 5 12 (u)

Figura 2

Figura 2



POLIEDRO CÓNCAVO DERIVADO DE UN OCTAEDRO REGULAR CONVEXO, OBTENIDO AL PROYECTAR DESDE EL CENTRO DE LA ESFERA CIRCUNSCRITA A ÉSTE, Y SOBRE ELLA, LOS CENTROS DE CADA CARA, UNIENDO A CONTINUACIÓN ESTOS PUNTOS CON LOS VÉRTICES DEL TRIÁNGULO DE DICHA CARA ——————

Radio de la esfera circunscrita

$r' = 76.1$ mm.

Variante del modelo M-27.1

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo del poliedro cóncavo, derivado de un octaedro regular convexo, obtenido al proyectar desde el centro de la esfera circunscrita a éste, y sobre ella, los centros de cada cara, uniendo a continuación estos puntos con los vértices del triángulo de dicha cara.

Este modelo que estudiamos es análogo al modelo M-27.1, y varía tan solo en la longitud del radio de su esfera circunscrita, que pasa a ser a $r_{ec} = 76.1$ mm en lugar de $r_{ec} = 110$ mm del mencionado modelo M-27.1, por lo que lo consideramos como una variante del M-27.1.

Para el cálculo de las dimensiones de éste modelo, tomaremos como base los ya obtenidos en el mencionado modelo M-27.1. El coeficiente de proporcionalidad o escala E de reducción, será pues:

$$E = \frac{76.1}{110} = 0,69\,\widehat{18}$$

Para la construcción de este modelo de caras macizas, se precisan las siguientes piezas:

PIEZA Nº 1 CARAS SUPERFICIALES 24 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 1



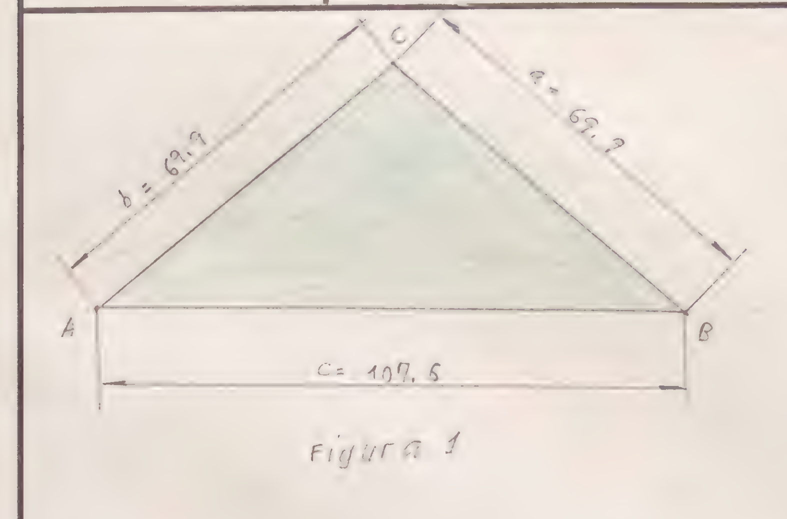


Figura 1

PIEZA Nº 1 24 (u)

Figura 1

Las longitudes de los lados del triángulo ABC son proporcionales a los de la fig. 1 del modelo M-27.1

$|AB| = 155,6 \times 0.69\overline{18}... \cong$ 107.6 mm

$|AC = CB| = 101,1 \times 0.69\overline{18}. \cong$ 69.9 mm

PIEZA Nº 2 UNIONES ARISTAS EN LADOS "a" y "b" (fig. 1)

24 unidades

Su forma y dimensiones se representan en la figura 2

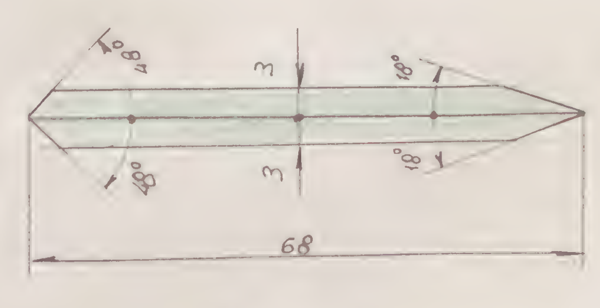


Figura 2

PIEZA Nº 2 24 (u)

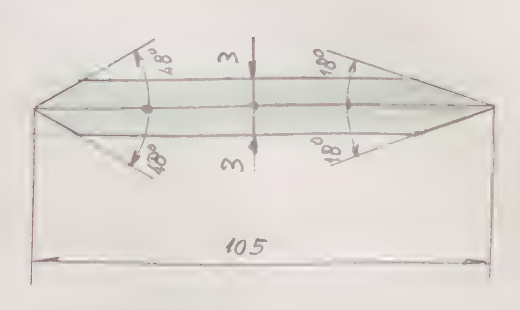
Figura 2

PIEZA Nº 3 UNIONES ARISTAS EN LADOS "C" (figura 1)

12 unidades

Su forma y dimensiones se representan en la figura 3.





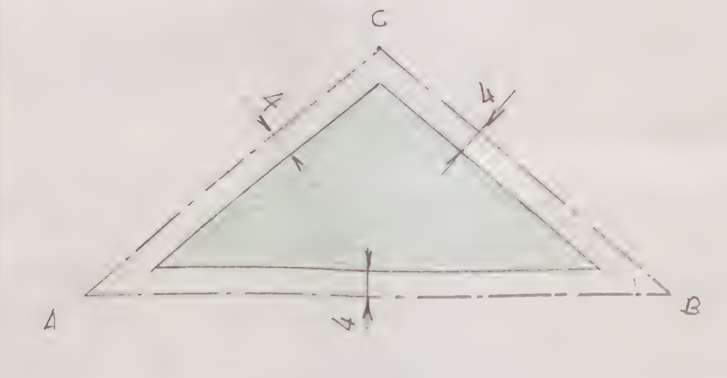
PIEZA Nº 3 12 (u)

Figura 3

Figura 3

PIEZA Nº 4 REFUERZO NORMAL INTERIOR 24 unidades

La forma y dimensiones se deducen de las del triángulo ABC de la figura 1. y se representan en la figura 4



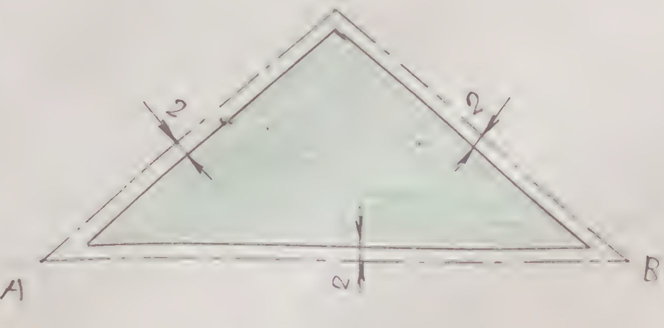
PIEZA Nº 4 24 (U)

Figura 4

Figura 4

PIEZA Nº 5 FORRO COLOREADO 24 unidades

La forma y dimensiones se deducen de las del triángulo ABC de la figura 1. y se representan en la figura 5



PIEZA Nº 5 24 (u)

Figura 5

Figura 5

MODELO CORPÓREO DEL POLIEDRO CONVEXO DERIVADO DEL DODECAEDRO E ICOSAEDRO REGULARES, CONJUGADOS POR SUS ARISTAS, OBTENIDO AL UNIR LOS EXTREMOS DE LAS ARISTAS DE AMBOS POLIEDROS REGULARES QUE SE CORTAN PERPENDICULARMENTE EN SUS PUNTOS MEDIOS.

Radio de la esfera circunscrita al icosaedro generador:

$r' = 110$ mm.

	Ejercicios de construcción de poliedros MODELOS CORPÓREOS	Modelo M-11.1

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo del poliedro convexo, derivado del dodecaedro e icosaedro regulares, conjugados por sus aristas, obtenido al unir los extremos de las aristas de dichos poliedros regulares las cuales se cortan perpendicularmente dos a dos en sus puntos medios.

Este modelo ha sido estudiado en el ejercicio G.E. , y representado en la lámina nº 32 del mismo.

Las características del mismo, son:

Número de caras rómbicas	C = 30
Número de vértices	V = 32
Número de aristas	A = 60

Las caras tienen la forma de rombos, siendo sus diagonales las aristas a_{20} y a_{12} del icosaedro y dodecaedro regulares convexos, generadores, respectivamente. Todas las caras son iguales.

El modelo que estudiamos es de caras macizas

Para la construcción de este modelo, se precisan las siguientes piezas:

DATO: Radio $r_{ec}^{20} = 110$ de la esfera circunscrita al icosaedro generador

Febrero 1979

PIEZA Nº 1 CARAS SUPERFICIALES 30 unidades

Como hemos indicado anteriormente sus caras son rómbicas, y su forma y dimensiones se detallan en la figura 1.

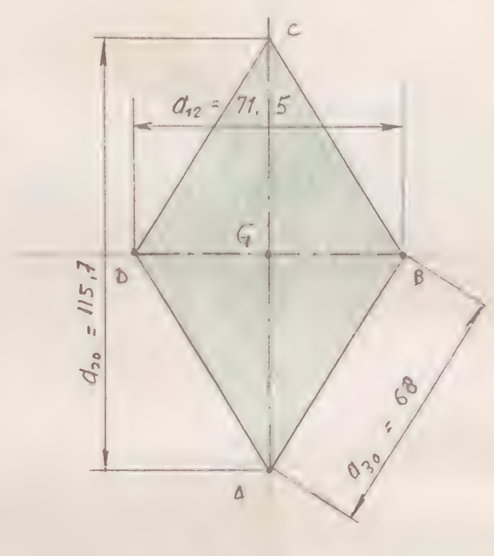


Figura 1

Las fórmulas aplicadas a continuación han sido deducidas en el ejercicio G.E.... lamina 32

$$CA = \boxed{d_{20}} = \sqrt{\frac{10 - 2\sqrt{5}}{5}} \times r_{ec}^{20} \cong$$

$$\cong 1.05\ 14\ 62\ 22\ 4 \ldots \times 110 \cong \boxed{115,7\ \text{mm}}$$

$$DB = \boxed{a_{12}} = 2\sqrt{\frac{5 - 2\sqrt{5}}{5}} \times r_{ec}^{20} \cong$$

PIEZA Nº 1 30 (u)

$$\cong 0,64\ 98\ 39\ 39\ 3 \ldots \times 110 \cong \boxed{71,5\ \text{mm}}$$

$$AB = \boxed{a_{30}} = \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{2}} \times r_{ec}^{20} = 0,61\ 80\ 33\ 98\ 9 \ldots \times 110 = \boxed{68\ \text{mm}}$$

PIEZA Nº 2 REFUERZO NORMAL INTERIOR 30 unidades

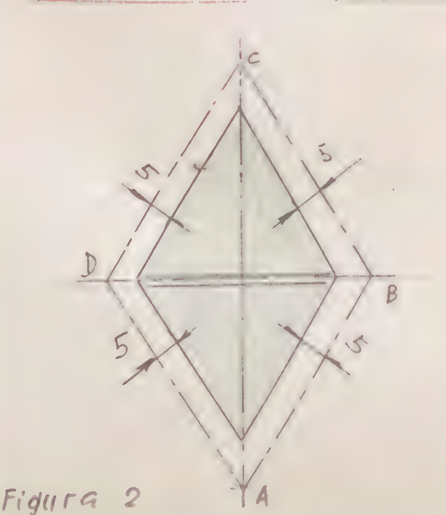


Figura 2

Su forma y dimensiones se deducen de las del rombo ABCD de la figura 1 y se representan en la figura 2

PIEZA Nº 2 30 (u)

Figura 2

Febrero 1979



PIEZA Nº 3 REFUERZO TRANSVERSAL INTERIOR 60 unidades
(simétricas 2 a 2)

Se colocan en la dirección de la diagonal menor DB (ver fig. 2).

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 3

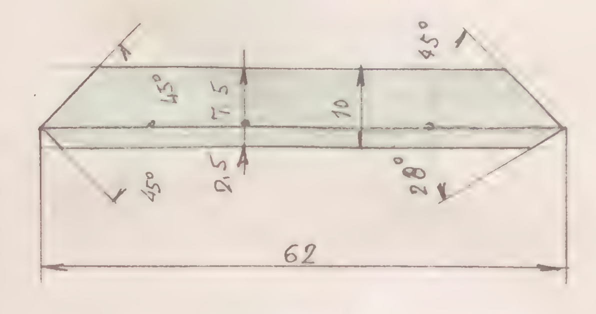


Figura 3

PIEZA Nº 3 60 (u)

Figura 3

PIEZA Nº 4 UNIONES ARISTAS 60 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 4

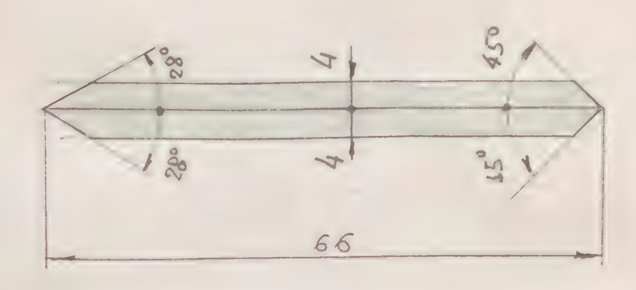


Figura 4

PIEZA Nº 4 60 (u)

Figura 4

PIEZA Nºs 5 FORRO COLOREADO 30 unidades

Su forma y dimensiones se deducen de las del rombo ABCD de la figura 1, y se representan en la figura 5



Modelo M - 32.1

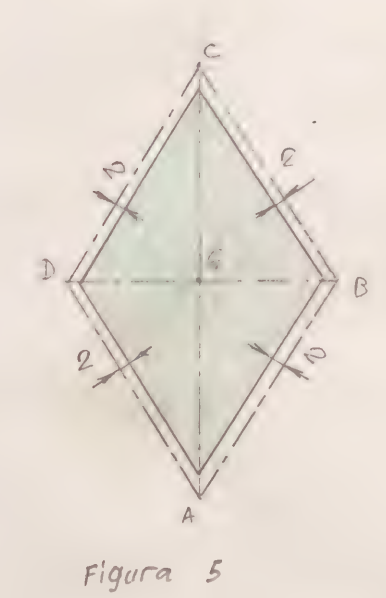


Figura 5

PIEZA Nº 5   30 (G)

Figura 5

UNE A4 210 x 297

Febrero 1979





Variante del modelo M-32.1

MODELO CORPÓREO DEL POLIEDRO CONVEXO DERIVADO DEL DODECAEDRO E ICOSAEDROS REGULARES, CONJUGADOS POR SUS ARISTAS, OBTENIDO AL UNIR LOS EXTREMOS DE LAS ARISTAS DE AMBOS POLIEDROS REGULARES, LAS CUALES SE CORTAN PERPENDICULARMENTE EN SUS PUNTOS MEDIOS.

Radio de la esfera circunscrita al icosaedro generador:

$r' = 110$ m m.

Variante del modelo M-32.1

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo del poliedro convexo derivado del dodecaedro e icosaedro regulares, conjugados por sus aristas, obtenido al unir los extremos de las aristas de dichos poliedros regulares, las cuales se cortan perpendicularmente dos a dos en sus puntos medios.

Este modelo es una variante del modelo M-32.1, la cual consiste en construirlo con sus caras vaciadas en sustitución a las caras macizas del M-32.1

Para la construcción de este modelo, se precisan las siguientes piezas:

PIEZA Nº 1 CARAS SUPERFICIALES 30 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 1, y se deducen de las del rombo ABCD (fig. 1) del modelo M-32.1.

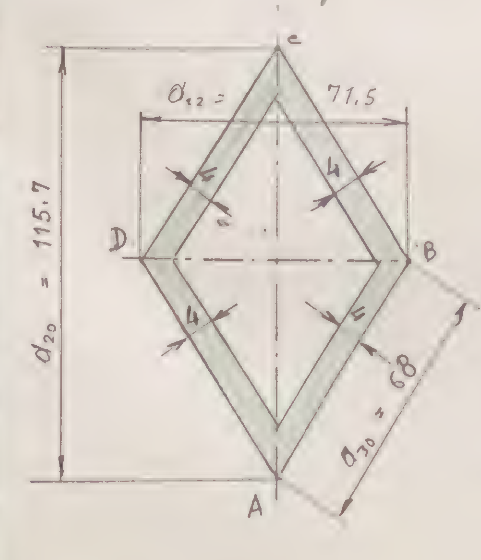


Figura 1

PIEZA Nº 1 30 (u)

Figura 1



Modelo M - 322

PIEZA Nº 2 UNIONES ARISTAS 60 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 1

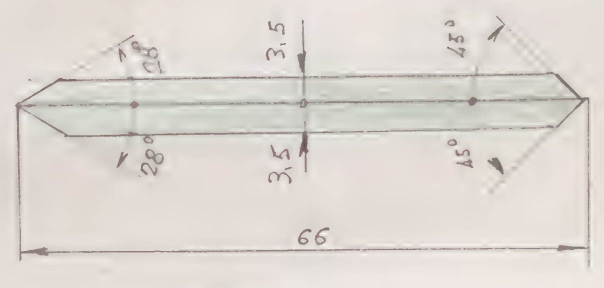


Figura 2

PIEZA Nº 2 60 (u)

Figura 2

UNE A4 210 x 297

Febrero 1979



MODELO CORPÓREO EN EL QUE SE PONE DE MANIFIESTO QUE EL ICOSAEDRO REGULAR CONVEXO ES INSCRIPTIBLE EN EL POLIEDRO CONVEXO ESTUDIADO EN EL MODELO M-32.2

Radio de la esfera circunscrita al icosaedro generador:

$r' = 110$ mm.

UNE A4 210 x 297

[signature] Febrero 1979

	Ejercicios de construcción de poliedros MODELOS CORPÓREOS	Modelo M-32.3

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo en el que se pone de manifiesto que el icosaedro regular convexo, es inscriptible en el poliedro convexo estudiado en el modelo M-32.2

En el estudio del modelo M-32.1 vimos que el poliedro convexo derivado del dodecaedro e icosaedro regulares, conjugados por sus aristas, se obtenía al unir los extremos de las aristas de dichos poliedros regulares, las cuales se cortan perpendicularmente dos a dos en sus puntos medios.

Las caras del mencionado poliedro convexo son rómbicas y su forma y dimensiones se detallan en la fig. 1 del mencionado modelo M-32.1.

Los vértices A, C de la diagonal mayor del rombo, son los vértices del icosaedro regular generador y los vértices B, D, de la diagonal menor, son vértices del dodecaedro generador. La esfera circunscrita a este último es de menor radio del de la circunscrita al icosaedro.

Por consiguiente, ambos poliedros regulares son inscriptibles en el poliedro convexo estudiado en el mencionado modelo M-32.1 y también en el del M-32.2.

El poliedro convexo exterior es de caras vaciadas (M-32.2)

El icosaedro regular convexo es de caras macizas (M-5.101)

UNE A4 210 x 297



Modelo M-32.3

Para la construcción de este modelo se precisan las siguientes piezas:

1) POLIEDRO CONVEXO EXTERIOR

PIEZA Nº 1 CARAS SUPERFICIALES 30 unidades

Iguales a la pieza nº1 (fig. 1) del modelo M-32.2

PIEZA Nº 2 UNIONES ARISTAS 60 unidades

Iguales a la pieza nº2 (fig. 2) del modelo M-32.2

2) ICOSAEDRO REGULAR CONVEXO INSCRITO EN EL POLIEDRO 1)

PIEZA Nº 3 CARAS SUPERFICIALES 20 unidades

Iguales a la pieza nº1 (fig. 1) del modelo M-5.101

PIEZA Nº 4 REFUERZO NORMAL INTERIOR 20 unidades

Iguales a la pieza nº2 (fig. 2) del modelo M-5.101

PIEZA Nº 5 REFUERZO TRANSVERSAL INTERIOR 60 unidades

Iguales a la pieza nº3 (fig. 3) del modelo M-5.101

UNE A4 210 x 297

[signature] Febrero 1979



PIEZA Nº 6 UNIONES ARISTAS 30 unidades

Iguales a la pieza nº 4 (fig. 4) del modelo M-5.101

PIEZA Nº 7 FORRO COLOREADO DE LAS CARAS SUPERFICIALES 20 unidades

Iguales a la pieza nº 5 (fig. 5) del modelo M-5.101

UNE A4 210 x 297

[signature] Febrero 1979

MODELO CORPÓREO EN EL QUE SE PONE DE MANIFIESTO QUE EL DODECAEDRO REGULAR CONVEXO ES INSCRIPTIBLE EN EL POLIEDRO CONVEXO ESTUDIADO EN EL MODELO M-32.2 —

Radio de la esfera circunscrita al icosaedro generador:

$r' = 110$ m m.

UNE A4 210 x 297

	Ejercicios de construcción de poliedros MODELOS CORPÓREOS	Modelo M - 32.4

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo en el que se pone de manifiesto que el dodecaedro regular convexo, es inscriptible en el poliedro convexo estudiado en el modelo M - 32.2.

Las caras del poliedro convexo exterior son rómbicas y su forma y dimensiones se detallan en la figura 1 del modelo M - 32.1. Los vértices B, D, de la diagonal del rombo, son vértices del dodecaedro regular generador, siendo el radio de la esfera circunscrita a éste, de menor tamaño que el de la circunscrita al poliedro exterior.

Así pues, el dodecaedro regular convexo es inscriptible en el poliedro convexo del modelo M - 32.2 de igual forma y tamaño que el del modelo M - 32.1.

El poliedro convexo exterior es de caras vaciadas

El dodecaedro regular convexo, inscrito en el anterior, es de caras macizas

Para la construcción de este modelo, se precisan las siguientes piezas:

1) POLIEDRO CONVEXO EXTERIOR

PIEZA Nº 1 CARAS SUPERFICIALES 30 unidades

Iguales a la pieza nº 1 (fig. 1) del modelo M - 32.2

UNE A4 210 x 297

Alvarez Febrero 1979



PIEZA Nº 2 UNIONES ARISTAS 60 unidades

Iguales a la pieza nº 2 (fig. 2) del modelo M-32.2

2) DODECAEDRO REGULAR CONVEXO INSCRITO EN EL POLIEDRO 1)

El radio r_{ec}^{12} de la esfera circunscrita al dodecaedro, se obtiene de la form. del ejercicio G.E. , lám. 32:

$$r_{ec}^{12} = \sqrt{\frac{3(5-\sqrt{5})}{10}} \times r_{0c}^{20} \cong 0.91\,05\,92\,99\,7\ldots \times 110 = 100,16\,52\,29\,7\ldots$$

$$\cong 100 \text{ mm.}$$

La arista del dodecaedro se obtiene de la fórmula (ver modelo M-4.101)

$$a_{12} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{3} \times r_{ec}^{20} = 0.71\,36\,44\,17\,9\ldots \times 100,16\,52\,29\,7\ldots \cong$$

$$= 71,48\,23\,33\,11\ldots \cong 71.5 \text{ mm}$$

(Valor coincidente con el de la diagonal menor DB de una cara rómbica).- Ver fig. 1 del modelo M-32.1

El radio "r_{c-5}" de la circunferencia circunscrita al pentágono regular convexo de una cara superficial, cuyo lado $l_5 = a_{12}$, será: (ver fórm. 11 del ejercicio G.P. 1400-44)

$$r_{c-5} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\; l_5 = 0.85\,06\,50\,80\,8\ldots \times 71,48\,23\,33\,11\ldots \cong 60.8 \text{ mm}$$

UNE A4 210 x 297

Alvarez Febrero 1979



PIEZA Nº 3 CARAS SUPERFICIALES 12 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 1

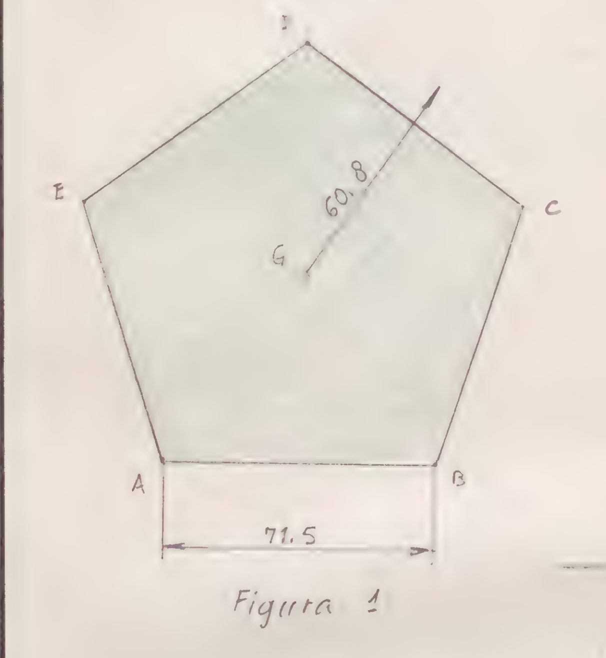


Figura 1

PIEZA Nº 3 12 (u)

Figura 1

PIEZA Nº 4 REFUERZO NORMAL INTERIOR 12 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 2, y se deducen de las del pentágono ABCDEA de la figura 1

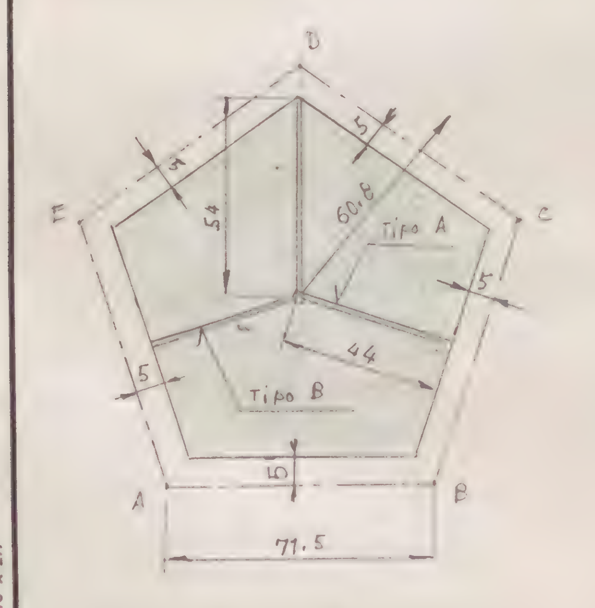


Figura 2

PIEZA Nº 4 12 (u)

Figura 2

UNE A4 210 x 297

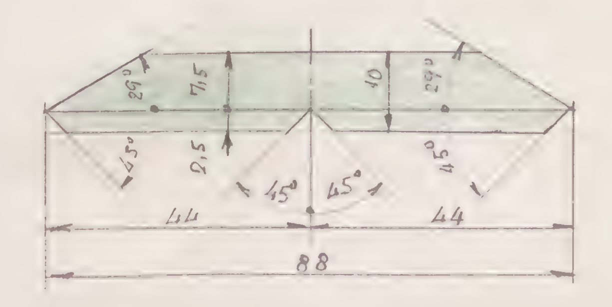


Modelo N- 32.4

PIEZA Nº 5 REFUERZO TRANSVERSAL INTERIOR 36 unidades (simétricas 2 a 2)

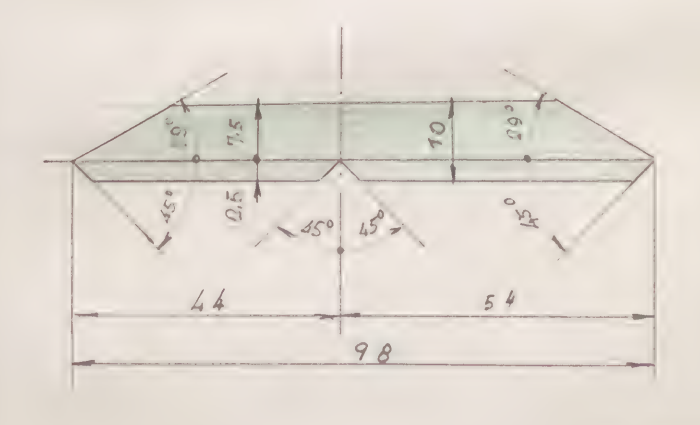
(12 del tipo B y 24 del tipo A)

Figura 3



PIEZA Nº 5 Tipo B

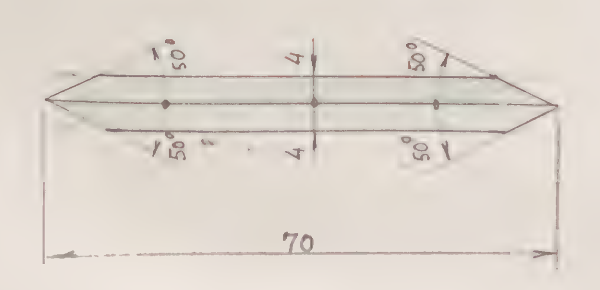
12 (u) (simétricas 2 a 2)



PIEZA Nº 5 Tipo A

24 (u) (simétricas 2 a 2)

PIEZA Nº 6 UNIONES ARISTAS 30 unidades



PIEZA Nº 6 30 (u)

Figura 4

Figura 4

PIEZA Nº 7 FORRO COLOREADO 12 unidades

UNE A4 210 x 297

Febrero 1979

Modelo M - 32. 4

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 5, y se deducen de las del pentágono regular ABCDEA de la figura 1

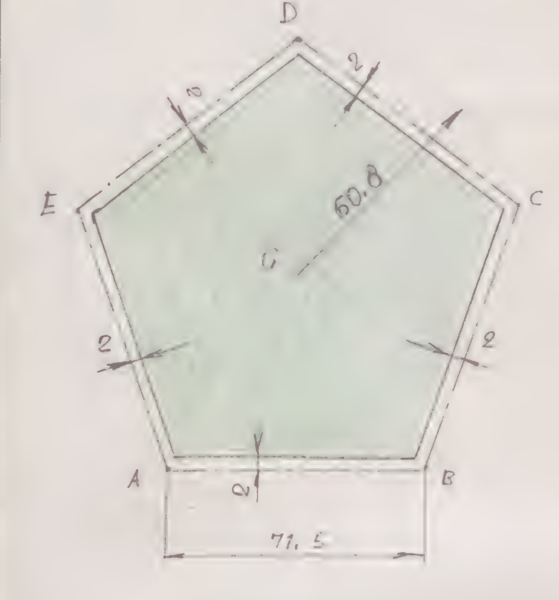


Figura 5

PIEZA Nº 7 12 (u)

Figura 5

Alvarez Febrero 1979

	MODELOS CORPÓREOS	Modelo M-32.5

Variante del modelo M - 32.1

MODELO CORPÓREO DEL POLIEDRO CONVEXO DERIVADO DEL DODECAEDRO E ICOSAEDRO REGULARES, CONJUGADOS POR SUS ARISTAS, OBTENIDO AL UNIR LOS EXTREMOS DE LAS ARISTAS DE AMBOS POLIEDROS REGULARES, LAS CUALES SE CORTAN PERPENDICULARMENTE EN SUS PUNTOS MEDIOS.

Radio de la esfera circunscrita al icosaedro generador:

$r' = 76{,}1$ mm

UNE A4 210 x 297

Variante del modelo M - 32.1

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo del poliedro convexo, derivado del dodecaedro e icosaedro regulares, conjugados por sus aristas, obtenido al unir los extremos de las aristas de dichos poliedros regulares, las cuales se cortan perpendicularmente dos a dos en sus puntos medios.

Este modelo es análogo al estudiado en el M-3.1, con la variante de ser de menor tamaño, ya que el radio r_{ec}^{20} de la esfera circunscrita al icosaedro regular generador, es de 76.1 mm, menor que el de 110 mm del mencionado modelo M-3.1.

El coeficiente de proporcionalidad o escala de reducción, será pues:

$$E = \frac{76.1}{110} = 0.69\widehat{18}\ldots$$

que aplicaremos en el cálculo de las longitudes de este modelo en función de las correspondientes del M-3.1

Para la construcción de este modelo, de caras macizas, se precisan las siguientes piezas:

PIEZA Nº 1 CARAS SUPERFICIALES 30 unidades



Su forma y dimensiones se detallan en la figura 1

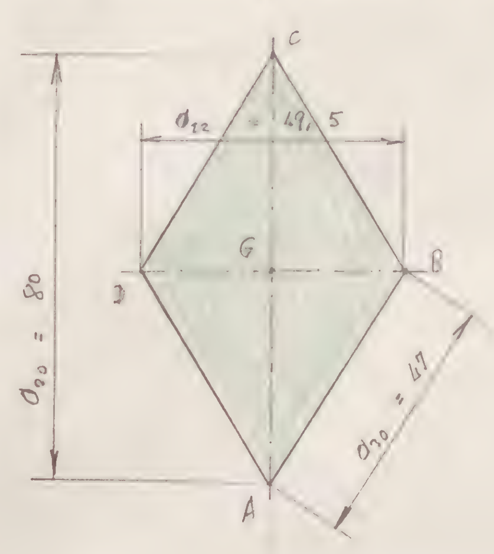


Figura 1

Las magnitudes acotadas se calculan a continuación:

115,7 × 0,69 18... ≅ 80

71,5 × id ≅ 49,5

68 × id ≅ 47

PIEZA Nº 1 30 (u)

Figura 1

PIEZA Nº 2 REFUERZO NORMAL INTERIOR 30 unidades

Su forma y dimensiones se deducen de las del rombo ABCD de la figura 1, y se representan en la figura 2

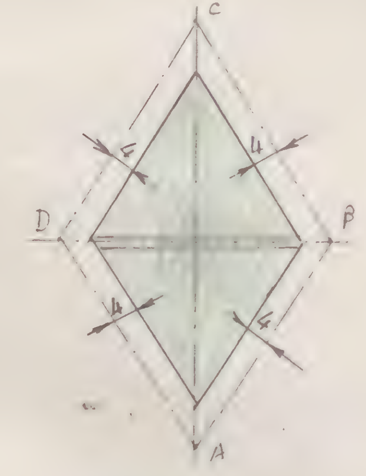


Figura 2

PIEZA Nº 2 30 (u)

Figura 2

PIEZA Nº 3 REFUERZO TRANSVERSAL INTERIOR 60 unidades (simétricas 2 a 2)

Modelo M-3915

Se colocan en la dirección de la diagonal menor DB (ver fig. 2). Su forma y dimensiones se detallan en la figura 3.

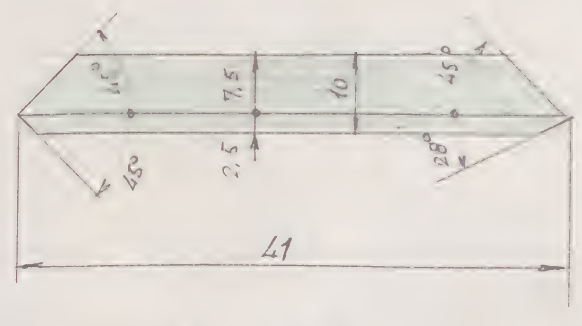


Figura 3

PIEZA Nº 3 60 (u)

Figura 3

PIEZA Nº 4 UNIONES ARISTAS 60 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 4

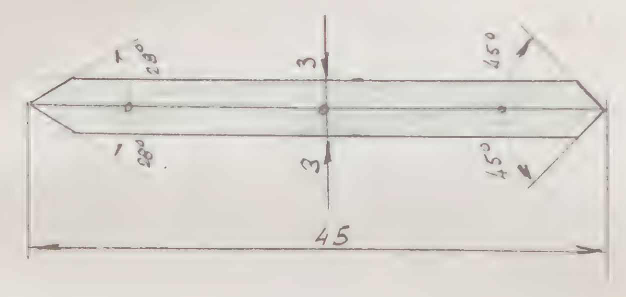


Figura 4

PIEZA Nº 4 60 (u)

Figura 4

PIEZA Nº 5 FORRO COLOREADO 30 unidades



Figura 5

Su forma y dimensiones se deducen de las del rombo ABCD de la fig 1 y se detallan en la figura 5

PIEZA Nº 5 60 (u)

Figura 5

UNE A4 210 x 297

Febrero 1979



MODELO CORPÓREO DEL POLIEDRO CONVEXO DE CARAS MACIZAS "ARQUIMEDIANO III", FORMADO POR OCHO CARAS TRIANGULARES REGULARES (C_3) Y SEIS CARAS CUADRADAS (C_4), CONCURRIENDO EN CADA VÉRTICE $2\ C_3 + 2\ C_4$.

Radio de la esfera circunscrita:

$r' = 110$ mm.

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo del poliedro convexo de caras macizas "ARQUIMEDIANO III", formado por ocho caras triangulares (C_3) y seis caras cuadradas (C_4), concurriendo en cada vértice $2C_3 + 2C_4$.

Este poliedro ha sido estudiado analíticamente en el ejercicio G.E. nº ....- Lámina 35, y representado en sus vistas principal, superior y lateral izquierda en la mencionada Lámina 35, a escala 1:1, con el radio r_{ec}^{III} de su esfera circunscrita, de $r_{ec}^{III} = 55$ mm.

DATO ÚNICO DE ESTE EJERCICIO: Radio de la esfera circunscrita

$$r_{e_c}^{III} = 110 \text{ mm}$$

Las características geométricas del ARQUIMEDIANO III, son las siguientes:

Número de caras triangulares regulares	$C_3 = 8$
Número de caras cuadradas	$C_4 = 6$
Número de vértices $= \frac{8 \times 3 + 6 \times 4}{4}$	$V = 12$
Número de aristas $= \frac{8 \times 3 + 6 \times 4}{2}$	$A = 24$
Número de caras de un ángulo sólido	$2C_3 + 2C_4$

UNE A4 210 x 297

Tavares   Junio 1980

		Modelo M-35-1

Para poder obtener el despiezo de este poliedro, calculemos previamente la longitud "a^{III}" de la arista del mismo, en función del radio "r_{ec}^{III}" de su esfera circunscrita. Para ello utilizaremos la fórmula

$$r_{ec}^{III} = a^{III} \qquad (1)$$

deducida en el mencionado ejercicio G. E. nº...- Lámina 35, que nos da el valor del radio de la esfera circunscrita en función de la arista a^{III} del Arquimediano y viceversa. Por lo que tendremos a su vez

$$a^{III} = r_{ec}^{III} \qquad (2)$$

En el caso estudiado, tendremos:

$$\boxed{a^{III}} = r_{ec}^{III} = \boxed{110 \text{ mm}}$$

Esta sola magnitud nos permite la construcción del poliedro estudiado, para el cual son necesarias las siguientes piezas:

PIEZA Nº 1 CARAS LATERALES TRIANGULARES REGULARES - 8 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 1

UNE A4 210 x 297

Tavares Junio 1980



Modelo M-35.1

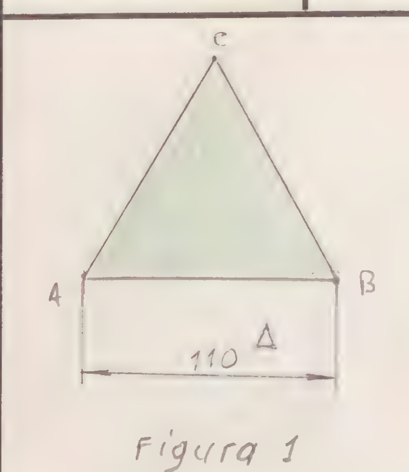


Figura 1

PIEZA Nº 1 . 8 (u)

Figura 1

PIEZA Nº 2 CARAS LATERALES CUADRADAS. 6 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 2

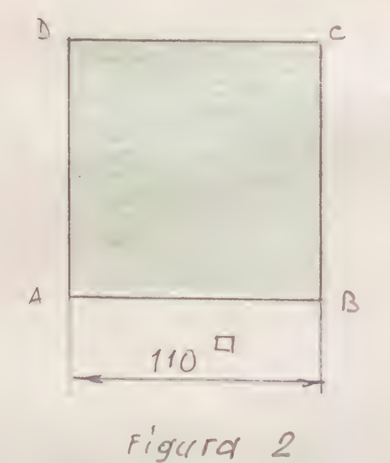


Figura 2

PIEZA Nº 2

6 (u)

Figura 2

PIEZA Nº 3 REFUERZO NORMAL INTERIOR DE LAS CARAS TRIANGULARES REGULARES

8 unidades

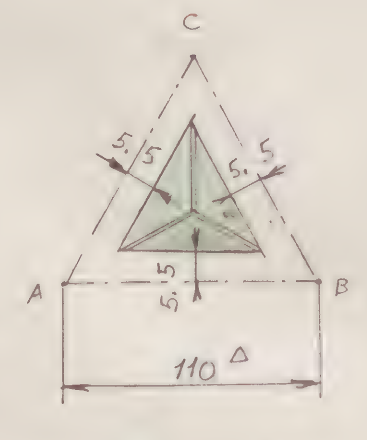


Figura 3

Su forma y dimensiones se deducen de las del triángulo ABC de la figura 1, y se detallan en la figura 3.

PIEZA Nº 3 8 (u)

Figura 3

UNE A4 210 x 297

Calvarro Junio 1980



Modelo M-35.1

PIEZA Nº 4 REFUERZO NORMAL INTERIOR DE LAS CARAS CUADRADAS 6 unidades

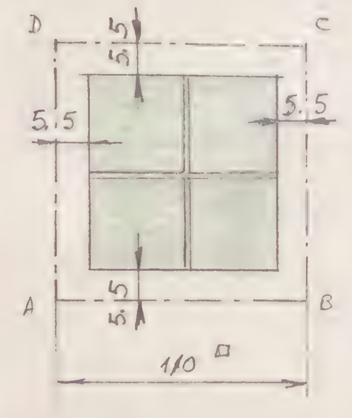


Figura 4

La forma y dimensiones se deducen de las del cuadrado ABCD de la figura 2, y se detallan en la figura 4

PIEZA Nº 4 6 (u)

Figura 4

PIEZA Nº 5 UNIONES ARISTAS DE UNA CARA TRIANGULAR CON OTRA CUADRADA 24 unidades

La forma y dimensiones se detallan en la figura 5

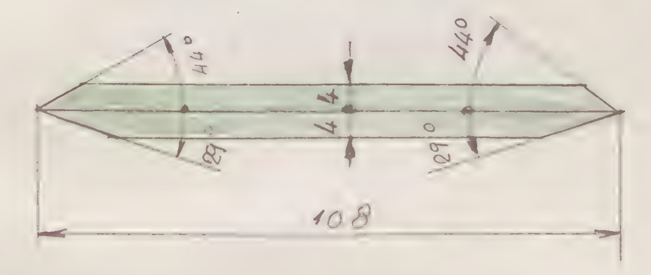


Figura 5

PIEZA Nº 5 24 (u)

Figura 5

PIEZA Nº 6 REFUERZO TRASVERSAL INTERIOR DE LAS CARAS TRIANGULARES 24 unidades (simétricas 2 a 2)

La forma y dimensiones se detallan en la figura 6; su colocación en la figura 3.

UNE A4 210 x 297

Calvario Junio 1980



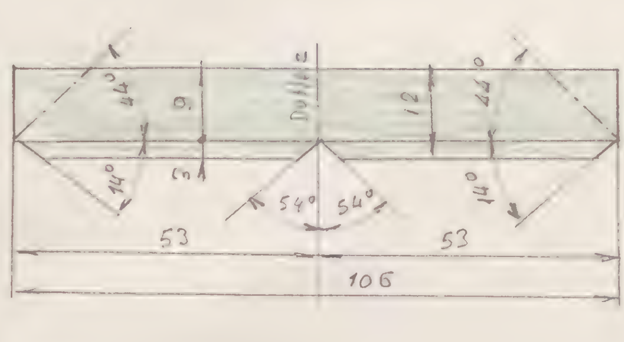


Figura 6

PIEZA Nº 6   24 (u)

Figura 6

PIEZA Nº 7 REFUERZO TRANSVERSAL INTERIOR DE LAS CARAS CUADRADAS   24 unidades
(simétricas 2 a 2)

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 7; su colocación en la figura 4.

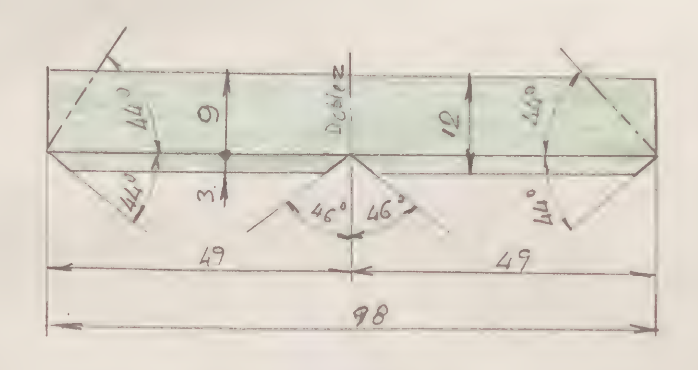


Figura 7

PIEZA Nº 7

24 (u)

Figura 7

PIEZA Nº 8 FORRO COLOREADO EN CARAS TRIANGULARES   8 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 8, y se deducen de las del triángulo ABC de la figura 1

C
2
2
2
A
B
110

Figura 8

PIEZA Nº 8   8 (u)

Figura 8

UNE A4 210 x 297

Calvarro   Junio 1980



PIEZA Nº 9 FORRO COLOREADO EN CARAS CUADRADAS

6 unidades

Su forma y dimensiones se deducen de las del cuadrado ABCD de la figura 2, y se detallan en la figura 9

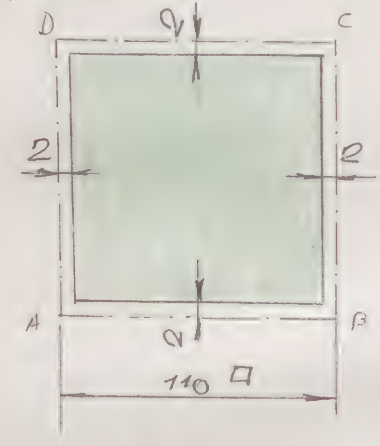


Figura 9

PIEZA Nº 9

6 (u)

Figura 9

Calvares Junio 1980

MODELO CORPÓREO DEL POLIEDRO CONVEXO DE CARAS VACIADAS, "ARQUIMEDIANO III", FORMADO POR OCHO CARAS TRIANGULARES REGULARES (C_3), Y SEIS CARAS CUADRADAS (C_4), CONCURRIENDO EN CADA VÉRTICE $2\,C_3 + 2\,C_4$.

Radio de la esfera circunscrita:

$r' = 110$ mm.

UNE A4 210 x 297

Ejercicios de construcción de poliedros MODELOS CORPÓREOS	Modelo M - 35.2

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo del poliedro convexo de caras vaciadas, "ARQUIMEDIANO III", formado por ocho caras triangulares regulares (C_3), y seis caras cuadradas (C_4), concurriendo en cada vértice $2\,C_3 + 2\,C_4$.

Este modelo, puede considerarse como una variante del M - 35.1, de igual forma y dimensiones, pero con sus caras vaciadas.

Las propiedades de este poliedro, así como sus dimensiones, son las enunciadas y calculadas en el mencionado modelo M - 35.1.

DATO ÚNICO DE ESTE EJERCICIO: r_{ec}^{III} = radio de la esfera circunscrita:

$$r_{ec}^{III} = 110 \text{ mm}$$

Para la construcción de este poliedro, son necesarias las siguientes piezas:

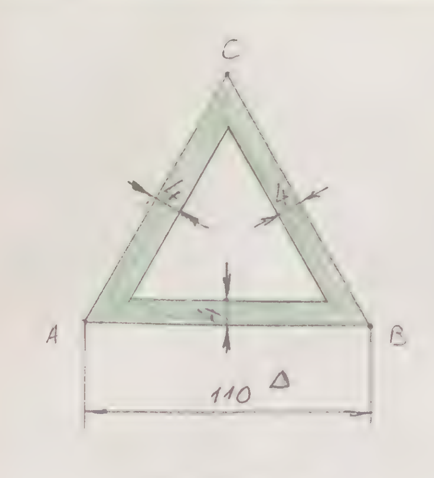
PIEZA Nº 1 CARAS LATERALES TRIANGULARES REGULARES 8 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 1

Álvarez Junio 1980



Modelo M-35.2



PIEZA Nº 1

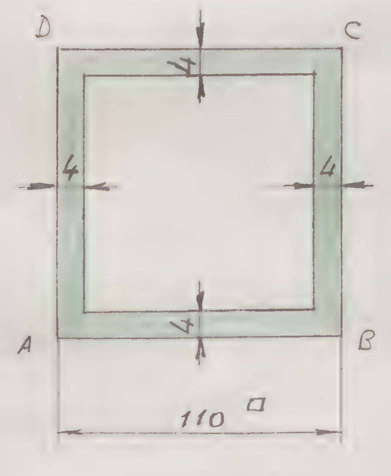
8 (u)

Figura 1

Figura 1

PIEZA Nº 2 CARAS LATERALES CUADRADAS 6 unidades.

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 2



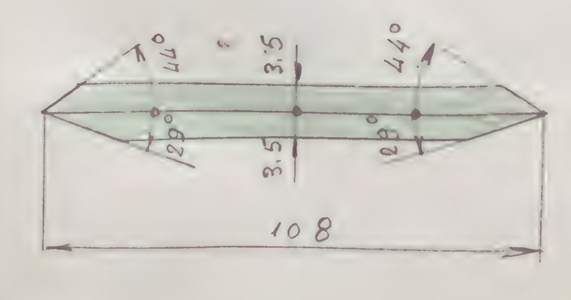
PIEZA Nº 2

6 (u)

Figura 2

Figura 2

PIEZA Nº 3 UNIONES ARISTAS DE UNA CARA TRIANGULAR CON OTRA CUADRADA 24 unidades



PIEZA Nº 3 24 (u)

Figura 3

Figura 3

UNE A4 210 x 297

Calvario Junio 1980

VARIANTE DEL MODELO M-35.1, DE IGUAL FORMA QUE ÉSTE, SIENDO MÁS PEQUEÑO EL RADIO DE SÚ ESFERA CIRCUNSCRITA.

Radio de la esfera circunscrita:

$r' = 76.1$ mm.

	Ejercicios de construcción de poliedros MODELOS CORPÓREOS	Modelo M 35.3

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo del poliedro convexo de caras macizas "ARQUIMEDIANO III", formado por ocho caras triangulares regulares (C_3) y seis caras cuadradas (C_4), concurriendo en cada vértice $2\ C_3 + 2\ C_4$.

Este modelo puede considerarse como una variante del modelo M-35.1. de igual forma, pero siendo menor el radio de su esfera circunscrita. ($r_{ec}^{III} = 76.1$ mm).

Para obtener el despiezo de este modelo, utilizaremos el mismo estudio analítico, hecho en el modelo M-35.1, determinando previamente el coeficiente "k" de reducción $k = 76.1 : 110$, o relación entre los radios correspondientes de sus respectivas esferas circunscritas.

DATO ÚNICO DEL EJERCICIO

$$r_{ec}^{III} = 76.1 \text{ mm}$$

COEFICIENTE DE REDUCCIÓN

$$k = \frac{76.1}{110} = 0.69\widehat{18}\ldots$$

UNE A4 210 x 297

Junio 1980



		Modelo M-35.3

A continuación presentamos diversas tablas de longitudes y ángulos, cuyas dimensiones han sido reseñadas en las distintas figuras del modelo M-35.1, y de los valores correspondientes a aplicar en la construcción de este nuevo modelo M-35.3, en el que son necesarias las siguientes piezas:

PIEZA Nº 1 CARAS LATERALES TRIANGULARES REGULARES 8 unidades

La figura 1, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas:

FIGURA 1	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
Pieza nº 1 8 (u)	110	76.1

PIEZA Nº 2 CARAS LATERALES CUADRADAS 6 unidades

La figura 2, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas

FIGURA 2	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
Pieza nº 2 6 (u)	110	76.1

UNE A4 210 x 297

[signature] Junio 1980



PIEZA Nº 3 REFUERZO NORMAL INTERIOR DE LAS CARAS TRIANGULARES REGULARES 8 unidades

La figura 3, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas:

FIGURA 3	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
Pieza nº 3 8 (u)	110 5,5	76,1 5

PIEZA Nº 4 REFUERZO NORMAL INTERIOR DE LAS CARAS CUADRADAS 6 unidades

La figura 4, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas:

FIGURA 4	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
Pieza nº 4 6 (u)	110 5,5	76,1 5

PIEZA Nº 5 UNIONES ARISTAS DE UNA CARA TRIANGULAR CON OTRA CUADRADA 24 unidades

La figura 5, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas:



Modelo M-35.3

FIGURA 5	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
Pieza nº 5 24(u)	108	74
	4	4
	29°	29°
	44°	44°

PIEZA Nº 6 REFUERZO TRANSVERSAL INTERIOR DE LAS CARAS TRIANGULARES 24 unidades

La figura 6, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas.

FIGURA 6	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
Pieza nº 6 24(u)	53	33
	106	66
	3	2,5
	9	7,5
	12	10
	14°	14°
	44°	44°

PIEZA Nº 7 REFUERZO TRANSVERSAL INTERIOR DE LAS CARAS CUADRADAS 24 unidades

La figura 7, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas:

UNE A4 210 x 297



Modelo M-3513

FIGURA 7	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
Pieza nº 7 24 (u)	49	32
	98	64
	3	2,5
	9	7,5
	12	10
	44º	44º
	46º	46º

PIEZA Nº 8 FORRO COLOREADO EN CARAS TRIANGULARES

8 unidades

La figura 8. ha de construirse con las siguientes cotas modificadas:

FIGURA 8	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
Pieza nº 8 8 (u)	110	76,1
	2	2

PIEZA Nº 9 FORRO COLOREADO EN CARAS CUADRADAS

6 unidades

La figura nº 9, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas:

FIGURA 9	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
Pieza nº 9 6(u)	110	76,1
	2	2



VARIANTE DEL MODELO M-35.2 DE IGUAL FORMA QUE ÉSTE, SIENDO MÁS PEQUEÑO EL RADIO DE SU ESFERA CIRCUNSCRITA.

Radio de la esfera circunscrita:

$r' = 76.1$ mm

UNE A4 210 x 297

	Ejercicios de construcción de poliedros MODELOS CORPÓREOS	Modelo M - 35.4

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo del poliedro convexo de caras vaciadas "ARQUIMEDIANO III", formado por ocho caras triangulares regulares (C_3) y seis caras cuadradas (C_4), concurriendo en cada vértice $2C_3 + 2C_4$

Este modelo puede considerarse como una variante del modelo M - 35.2, de igual forma, pero siendo menor el radio de su esfera circunscrita ($r_{ec}^{III} = 76.1$ mm).

Para obtener el despiezo de este modelo, utilizaremos el mismo estudio analítico, hecho en el modelo M - 35.2, determinando previamente el coeficiente "k" de reducción $k = 76.1 : 110$, o relación entre los radios correspondientes de sus respectivas esferas circunscritas.

DATO ÚNICO DEL EJERCICIO

$$r_{ec}^{III} = 76.1 \text{ mm}$$

COEFICIENTE DE REDUCCIÓN

$$k = \frac{76.1}{110} = 0.69\widehat{18}\ldots$$

UNE A4 210 x 297

[signature] Junio 1980



Modelo M - 35.4

A continuación presentamos diversas tablas de longitudes y ángulo, cuyas dimensiones han sido reseñadas en las distintas figuras del modelo M- 35,2, y de los valores correspondientes a aplicar en la construcción de este nuevo modelo M- 35.4, en el que son necesarias las siguientes piezas:

PIEZA Nº 1 CARAS LATERALES TRIANGULARES

8 unidades

La figura 1, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas:

FIGURA 1	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
Pieza nº 1 8(u)	110 4	76.1 3

PIEZA Nº 2 CARAS LATERALES CUADRADAS

6 unidades

La figura 2, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas:

FIGURA 2	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
Pieza nº 2 6 (U)	110 4	76.1 3

UNE A4 210 x 297

Cabrera Junio 1970



PIEZA Nº 3 UNIONES ARISTAS DE UNA CARA TRIANGULAR CON OTRA CUADRADA 24 unidades

La figura 3, ha de construirse con las siguientes cotas modificadas:

FIGURA 3	Longitudes mm	Cotas modificadas mm
Pieza nº 3	108	74
24 (4)	3,5	2.5
	29°	29°
	44°	44°

[firma] Junio 1980



MODELO CORPÓREO DEL "ARQUIMEDIANO III" OBTENIDO POR TRUNCADURA DE VÉRTICES DE UN EXAEDRO REGULAR CONVEXO, DE ARISTA "a_6", AL TOMAR SOBRE CADA ARISTA, Y DESDE SU VÉRTICE, LA DISTANCIA $\frac{1}{2} a_6$. - EL ARQUIMEDIANO OBTENIDO, SE CONSTRUIRÁ CON LAS CARAS MACIZAS, Y EL EXAEDRO REGULAR GENERADOR, CON LAS CARAS VACIADAS EN LOS VÉRTICES TRUNCADOS.

Radio de la esfera circunscrita al exaedro generador:

$$r_{ec}^{6} = 110 \text{ mm.}$$

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo del "ARQUIMEDIANO III", obtenido por truncadura de vértices de un exaedro regular convexo, de arista "a_6", a la distancia $x = \frac{1}{2} a_6$.- El Arquimediano generado se construirá con las caras macizas, y el exaedro regular convexo generador, con las caras vaciadas en los vértices truncados.

DATO ÚNICO DE ESTE EJERCICIO: r_{ec}^6 = radio de la esfera circunscrita al exaedro generador:

$$r_{ec}^6 = 110 \text{ mm}$$

1) CONSIDERACIONES PREVIAS

El proceso geométrico denominado de TRUNCADURA DE VÉRTICES de los poliedros regulares convexos, por el cual se obtienen muchos de los POLIEDROS SEMIREGULARES CONVEXOS, o POLIEDROS ARQUIMEDIANOS, y también los propios poliedros regulares convexos, fué estudiado sistemáticamente y aplicado al TETRAEDRO REGULAR CONVEXO en los ejercicios M-39.1; M-39.5; M-39.7 y M-6.2

Las diversas posiciones del plano secante dan lugar a la obtención de un poliedro núcleo, de muy variadas



formas, función de la posición del plano secante con respecto al tetraedro generador. Este plano es el que pasa por puntos tomados a la distancia "x" variable, sobre las aristas que concurren en cada vértice del mencionado tetraedro generador, y a partir de dicho vértice. Las nueve posiciones estudiadas, se detallan resumidamente en el ejercicio M-40,5

La POSICIÓN 4ª a la distancia $x = \frac{1}{2} a_4$, en el TETRAEDRO GENERADOR puede aplicarse también, como hacemos en este ejercicio, al EXAEDRO GENERADOR, generalizando los conceptos obtenidos en su ESTUDIO PREVIO a este caso particular.

Por consiguiente, podemos deducir previamente, que el poliedro núcleo obtenido por la truncadura de vértices del exaedro regular convexo, a la distancia $x = \frac{1}{2} a_6$, es decir cuando el plano secante pasa por los centros de las tres aristas que concurren en cada vértice, es un poliedro convexo en el que:

a) El plano secante produce en las caras del poliedro generador "polígonos regulares de igual número de lados que el de dichas caras, y cuyos vértices son los puntos medios de los lados de las caras. En el EXAEDRO GENERADOR se obtendrá en cada cara un cuadrado de lado

$$l_4 = \frac{a_6}{2} \times \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} a_6 \qquad (1)$$

UNE A4 210 x 297



		Modelo M- 35.5

b) El plano secante produce en los ángulos sólidos de los vértices del poliedro generador, "polígonos regulares convexos, cuyo número de lados es el de caras que forman el ángulo sólido, siendo la longitud de sus lados, la misma que la de los polígonos a)." – En el EXAEDRO GENERADOR se obtendrá en cada vértice un triángulo regular de lado $l_3 = l_4 = \frac{\sqrt{2}}{2} a_6$ (2)

Como consecuencia de lo expuesto anteriormente, podemos deducir que el poliedro núcleo resultante de la Truncadura de vértices de un EXAEDRO REGULAR CONVEXO, a la distancia $x = \frac{1}{2} a_6$ es un poliedro convexo de las siguientes características geométricas:

1) Número de caras triangulares regulares = $8\ C_3$

2) Número de caras cuadradas = $6\ C_4$

3) Número de vértices = $\frac{8 \times 3 + 6 \times 4}{4}$ = $12\ V$

4) Número de aristas = $\frac{8 \times 3 + 6 \times 4}{2}$ = $24\ A$

5) Número de caras en cada vértice = $2\ C_3 + 2\ C_4$

UNE A4 210 x 297

[signature] Junio 1980



		Modelo M - 35.5

Estas características son las mismas que las del poliedro semi-regular convexo denominado "ARQUIMEDIANO III" estudiado y representado en sus vistas principal, superior y lateral derecha, a escala 1:1, de arista $a_{III} = 55$ mm. en la lámina nº 35

Así pues, y como resumen de lo expuesto anteriormente, podemos establecer el siguiente enunciado que justifica el del modelo estudiado:

"El poliedro núcleo obtenido por la TRUNCADURA DE VÉRTICES de un EXAEDRO REGULAR CONVEXO, a la distancia $x = \frac{1}{2} a_6$, es un ARQUIMEDIANO III de arista $a_{III} = \frac{\sqrt{2}}{2} a_6$"

---

2) CÁLCULO ANALÍTICO DE LONGITUDES

Previamente determinaremos las siguientes magnitudes en función de $r_{e_c}^{6} = 110$ mm dato único del problema:

2.1 Arista "a_6" del exaedro regular convexo generador

Se obtiene de la fórmula $r_{ec}^{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} a_6$ deducida en

UNE A4 210 x 297

Juanio 1980



el ejercicio G.E. nº ....- Lámina 2. Despejando en ella a_6, tendremos:

$$\boxed{a_6} = r_{ec}^6 : \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \times r_{ec}^6 = \boxed{\frac{2\sqrt{3}}{3} r_{ec}^6} \qquad (3)$$

2.2 Arista "a_{III}" del ARQUIMEDIANO III

Se deduce de las fórmulas (1) y (2) sustituyendo en ellas el valor (3)

$$\boxed{a_{III}} = \frac{\sqrt{2}}{2} a_6 = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{2\sqrt{3}}{3} \times r_{ec}^6 = \boxed{\frac{\sqrt{6}}{3} r_{ec}^6} \qquad (4)$$

2.3 Distancia "x" en que la truncadura de vértices del exaedro regular convexo produce el Arquimediano III

$$\boxed{x} = \frac{1}{2} a_6 = \frac{1}{2} \times \frac{2\sqrt{3}}{3} \times r_{ec}^6 = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{3} r_{ec}^6} \qquad (5)$$

---

3) CONSTRUCCIÓN DEL MODELO PROPUESTO

Para poder efectuar la construcción de este modelo, determinemos previamente los valores numéricos correspondientes a las fórmulas (3), (4) y (5).

Éstos son los siguientes:

Modelo M-35.5

$$\boxed{d_6} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \times r_{ec}^{6} \cong 1,15\ 47\ 00\ 53\ 9\ldots \times 110 \cong \boxed{127,0 \ mm}$$

$$\boxed{a_{III}} = \frac{\sqrt{6}}{3} \times r_{ec}^{6} \cong 0,81\ 64\ 96\ 58\ 1\ldots \times 110 \cong \boxed{89.8 \ mm}$$

$$\boxed{x} = \frac{\sqrt{3}}{3} \times r_{ec}^{6} \cong 0,57\ 73\ 50\ 26\ 9\ldots \times 110 \cong \boxed{63,5 \ mm}$$

A) ARQUIMEDIANO NÚCLEO III DE CARAS MACIZAS

PIEZA Nº 1 CARAS LATERALES TRIANGULARES REGULARES

8 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 1

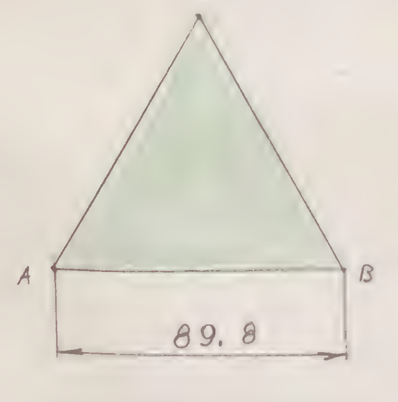


Figura 1

PIEZA Nº 1

8 (u)

Figura 1

PIEZA Nº 2 CARAS LATERALES CUADRADAS

6 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 2

UNE A4 210 x 297

Alvarez Junio 1980



D C

A B

89.8 □

Figura 2

PIEZA Nº 2

6 (u)

Figura 2

PIEZA Nº 3 — REFUERZO NORMAL EN CARAS TRIANGULARES REGULARES — 8 unidades

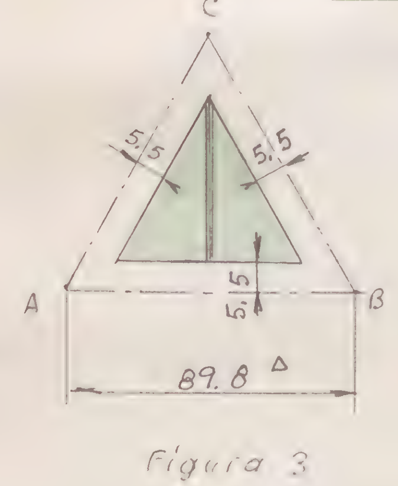


Figura 3

Su forma y dimensiones se deducen de las del triángulo ABC de la figura 1, y se detallan en la figura 3

PIEZA Nº 3 — 8 (u)

Figura 3

PIEZA Nº 4 — REFUERZO NORMAL EN CARAS CUADRADAS — 6 unidades

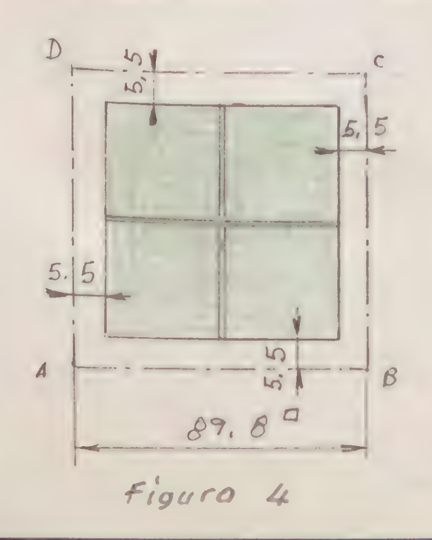


Figura 4

Su forma y dimensiones se deducen de las del cuadrado ABCD de la figura 2, y se detallan en la figura 4

PIEZA Nº 4 — 6 (u)

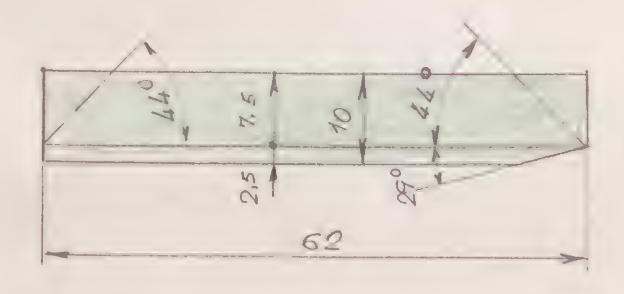
Figura 4

Junio 1980



PIEZA Nº 5 REFUERZO TRANSVERSAL EN CARAS TRIANGULARES REGULARES 16 unidades (simétricas 2 a 2)

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 5; su colocación en la figura 3.



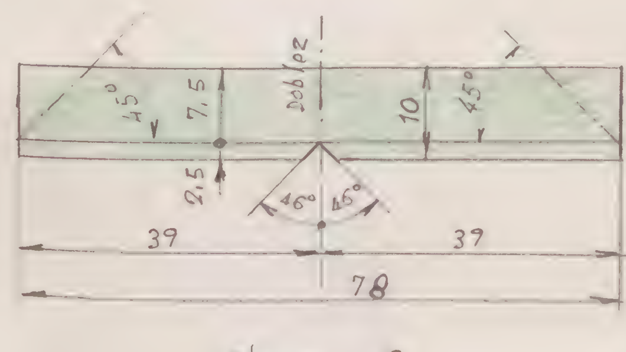
PIEZA Nº 5 16 (u)

Figura 5

Figura 5

PIEZA Nº 6 REFUERZO TRANSVERSAL EN CARAS CUADRADAS 24 unidades (simétricas 2 a 2)

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 6; su colocación en la figura 4.



PIEZA Nº 6

24 (u)

Figura 6

Figura 6

PIEZA Nº 7 UNIONES ARISTAS DE UNA CARA CUADRADA CON OTRA TRIANGULAR 24 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 7

UNE A4 210 x 297



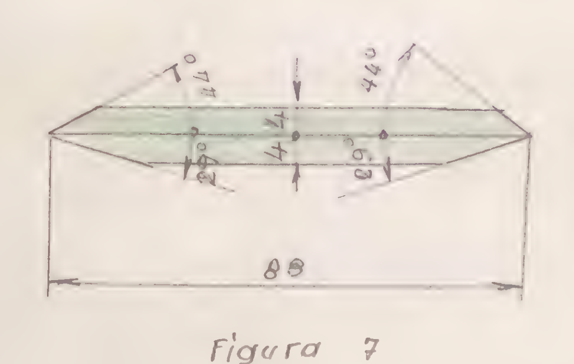


Figura 7

PIEZA Nº 7 24 (u)

Figura 7

PIEZA Nº 8 FORRO COLOREADO EN CARAS TRIANGULARES REGULARES 8 unidades

Su forma y dimensiones se deducen de las del triángulo ABC de la figura 1, y se detallan en la fig. 8

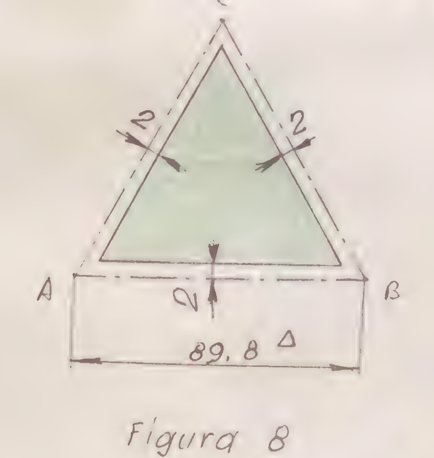


Figura 8

PIEZA Nº 8

8 (u)

Figura 8

PIEZA Nº 9 FORRO COLOREADO EN CARAS CUADRADAS 6 unidades

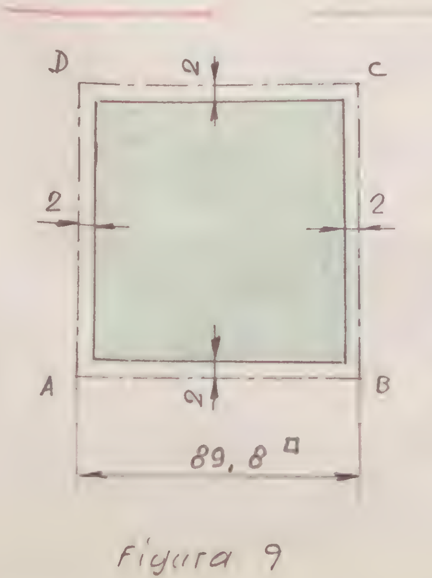


Figura 9

Su forma y dimensiones se deducen de las del cuadrado ABCD de la figura 2, y se detallan en la figura 9.

PIEZA Nº 9 6 (u)

Figura 9



B) EXAEDRO GENERADOR DE CARAS VACIADAS

Queda reducido a ocho pirámides triangulares rectas, regulares, cuyo desarrollo lateral es el siguiente:

PIEZA Nº 10 DESARROLLO LATERAL DE LAS OCHO PIRÁMIDES TRUNCADAS 8 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 10.

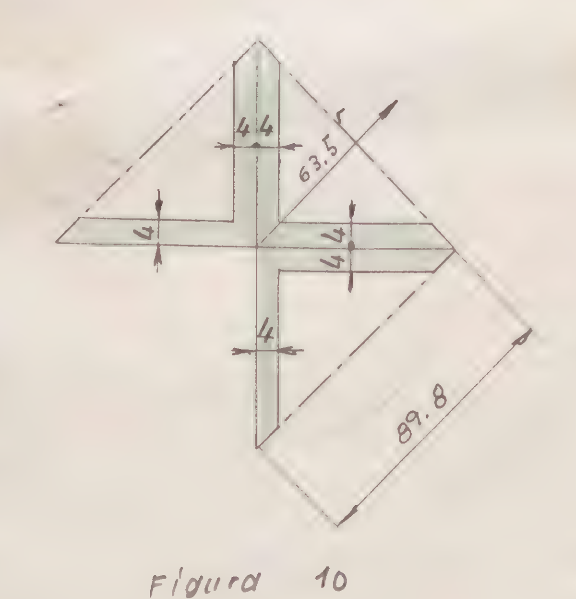


Figura 10

PIEZA Nº 10

8 (u)

Figura 10

PIEZA Nº 11 UNIONES ARISTAS 24 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 11

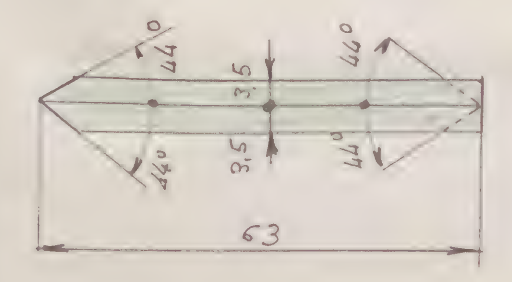


Figura 11

PIEZA Nº 11

24 (u)

Figura 11

UNE A4 210 x 297

Alvarez Junio 1980



MODELO M - 35.5

PATRONES

VARIANTE DEL MODELO CORPÓREO M-35.5, CONSISTENTE EN ADICIONAR AL MISMO, SEIS PIRÁMIDES RECTAS, CUADRADAS, DE CARAS VACIADAS, QUE TENGAN POR BASES LAS CARAS CUADRADAS DEL "ARQUIMEDIANO III" GENERADO, Y POR VÉRTICE, LAS PROYECCIONES, SOBRE LA ESFERA CIRCUNSCRITA AL EXAEDRO GENERADOR, DE LOS CENTROS DE LAS CARAS CUADRADAS, DESDE EL CENTRO "O" DEL POLIEDRO GENERADOR

Radio de la esfera circunscrita:

$r_{ec}^{8} = 110$ mm.

UNE A4 210 x 297

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo obtenido al adicionar al modelo M-35.5, seis pirámides rectas, cuadradas, de caras vaciadas, que tengan por bases las caras cuadradas del "Arquimediano III" generado, y por vértices, las proyecciones, sobre la esfera circunscrita al exaedro generador, de los centros de las caras cuadradas, desde el centro "O" del poliedro generador.

Como se deduce del enunciado, ha de construirse previamente un modelo igual al M-35.5, al cual ha de añadírsele seis pirámides rectas de base cuadrada, y de caras vaciadas, cuyo desarrollo y dimensiones estudiamos a continuación.

La altura "h_4" de dichas pirámides, se obtiene como diferencia del radio "r_{ec}^{6}" de la esfera circunscrita al exaedro regular convexo generador, y del radio "r_{ei}^{III-4}" de la esfera tangente a las caras cuadradas del Arquimediano generado. Así pues será:

$$h_4 = r_{ec}^{6} - r_{ei}^{III-4} \qquad (1)$$

El radio r_{ec}^{6}, se obtuvo en el ejercicio G.E. nº... Lám. 2, en función de la arista "a_6" del exaedro generador. Su



valor es:

$$r_{ec}^{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \; a_6 \qquad (2)$$

El radio "r_{ei}^{III-4}" de la esfera tangente a las caras cuadradas del Arquimediano III, se obtuvo en el ejercicio G.E. nº ....- Lámina 35. Su valor, en función de la arista "a_{III}" de dicho Arquimediano, es:

$$r_{ei}^{III-4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \; a_{III} \qquad (3)$$

y sustituyendo a_{III} por su valor $\frac{\sqrt{2}}{2} a_6$ (ver fórmula (4) del ejercicio M-35.5, tendremos:

$$r_{ei}^{III-4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \; a_6 = \frac{1}{2} \; a_6 \qquad (4)$$

Sustituyendo en (1) los valores (2) y (4), tendremos:

$$h_4 = r_{ec}^{6} - r_{ei}^{III-4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \; a_6 - \frac{1}{2} \; a_6 = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \; a_6 \qquad (5)$$

Sustituyendo en (5) el valor de $a_6 = \frac{2\sqrt{3}}{3} r_{ec}^{6}$, en función del radio r_{ec}^{6} de la esfera circunscrita al exaedro generador (ver fórmula (3) del modelo M-35.5), tendremos

$$h_4 = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \; a_6 = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \times \frac{2\sqrt{3}}{3} \; r_{ec}^{6} = \frac{6-2\sqrt{3}}{6} \; r_{ec}^{6} = \frac{3-\sqrt{3}}{3} \; r_{ec}^{6} \qquad (6)$$

Para obtener la longitud de la arista "a_4" de las ca-



ras laterales de las pirámides cuadradas, tendremos en cuenta que "a_4" es la hipotenusa de un triángulo rectángulo, uno de cuyos catetos es "h_4", y el otro es el radio "r_{c-4}" de la circunferencia circunscrita a la cara cuadrada del Arquimediano III. Así pues, será:

$$\boxed{a_4 = \sqrt{(h_4)^2 + (r_{c-4})^2}} \qquad (7)$$

El radio r_{c-4} de la circunferencia circunscrita a un cuadrado, en función de su lado l_4, es:

$$\boxed{r_{c-4} = \frac{\sqrt{2}}{2}\, l_4} \qquad (8)$$

(ver fórmula (1) del ejercicio G.P. 1.400 - 43)

En la fórmula (8), aplicada a este estudio, es $l_4 = a_{III}$, siendo a su vez $a_{III} = \frac{\sqrt{2}}{2}\, a_6$ (ver fórm. (4), modelo M-35.5) y también $a_6 = \frac{2\sqrt{3}}{3}\, r_{ec}^{\,6}$ (ver fórm. (3), modelo M-35.5) por lo que tendremos:

$$\boxed{l_4} = a_{III} = \frac{\sqrt{2}}{2}\, a_6 = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{2\sqrt{3}}{3}\, r_{ec}^{\,6} = \boxed{\frac{\sqrt{6}}{3}\, r_{ec}^{\,6}} \qquad (9)$$

valor que sustituido en (8), nos dará:

$$\boxed{r_{c-4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\, l_4 = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{6}}{3}\, r_{ec}^{\,6} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{3}\, r_{ec}^{\,6}} \qquad (10)$$

Sustituyendo en (7) los valores (6) y (10), tendremos:



$$\boxed{d_4} = \sqrt{(h_4)^2 + (r_{c-4})^2} = \sqrt{\left[\frac{3-\sqrt{3}}{3}\, r_{ec}^{6}\right]^2 + \left[\frac{\sqrt{3}}{3}\, r_{ec}^{6}\right]^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{3-\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}\; r_{ec}^{6} = \sqrt{\frac{(3-\sqrt{3})^2 + \sqrt{3}^2}{9}}\; r_{ec}^{6} = \sqrt{\frac{9+3-6\sqrt{3}+3}{9}}\; r_{ec}^{6} =$$

$$= \sqrt{\frac{15-6\sqrt{3}}{9}} \cdot r_{ec}^{6} = \boxed{\sqrt{\frac{5-2\sqrt{3}}{3}}\; r_{ec}^{6}} \qquad (11)$$

Las fórmulas (9) y (11) nos permiten calcular los elementos necesarios para el desarrollo lateral de las pirámides cuadradas que se adicionan al modelo M-35.5, para obtener el que se estudia.

Para este caso particular de $r_{ec}^{6} = 110$ mm, será:

$$\boxed{a_{III}} = l_4 = \frac{\sqrt{6}}{3} \cdot r_{ec}^{6} \cong 0{,}81\,64\,96\,58\,1\ldots \times 110 \cong \boxed{89.8 \text{ mm.}}$$

y

$$\boxed{d_4} = \sqrt{\frac{5-2\sqrt{3}}{3}} \times r_{ec}^{6} \cong 0{,}71\,55\,18\,08\,4\ldots \times 110 \cong \boxed{78{,}7 \text{ mm}}$$

Para la construcción de este modelo, se precisan las siguientes piezas:

A) MODELO CORPÓREO DEL ARQUIMEDIANO III, OBTENIDO POR TRUNCADURA DE VÉRTICES DE UN EXAE-

UNE A4 210 x 297



		Modelo M - 35.6

DRO REGULAR CONVEXO A LA DISTANCIA $\frac{1}{2} d_6 = x$

Piezas 1 al 11, iguales a las del modelo M - 35.5

B) PIRÁMIDES RECTAS, CUADRADAS, DE CARAS VACIADAS, QUE SE ADICIONAN AL MODELO M - 35.5

PIEZA Nº 12 DESARROLLO LATERAL DE LAS PIRÁMIDES ADICIONADAS 6 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 1.

AB = BC = CD = DE =

= 89.8 mm

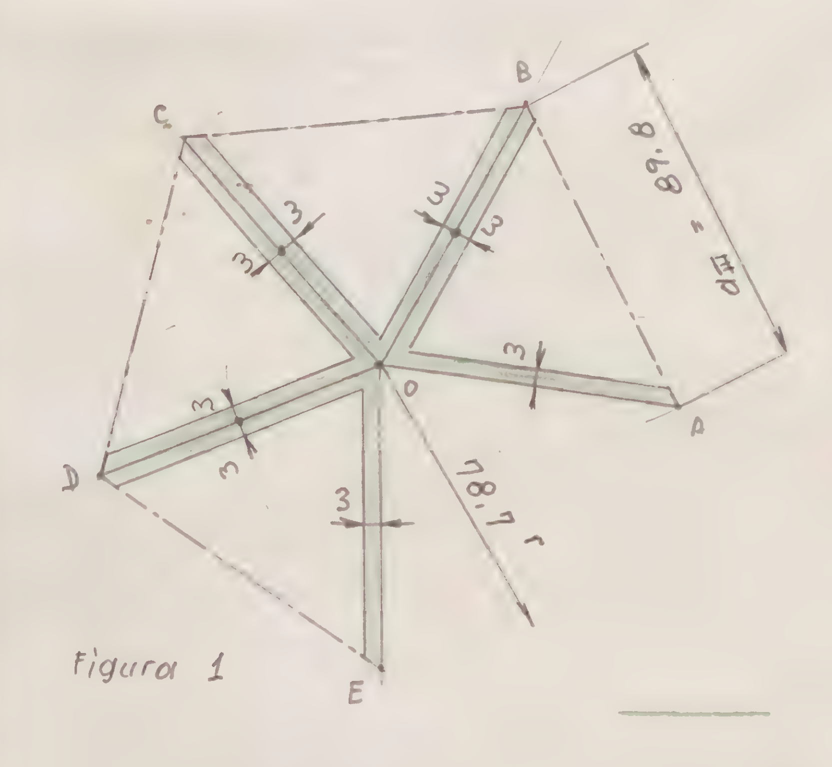


Figura 1

PIEZA Nº 12

6 (u)

Figura 1

PIEZA Nº 13 UNIONES ARISTAS 24 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 2

PIEZA Nº 13 24 (u)

Figura 2

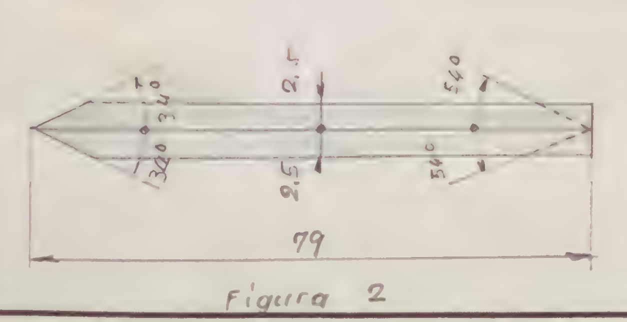
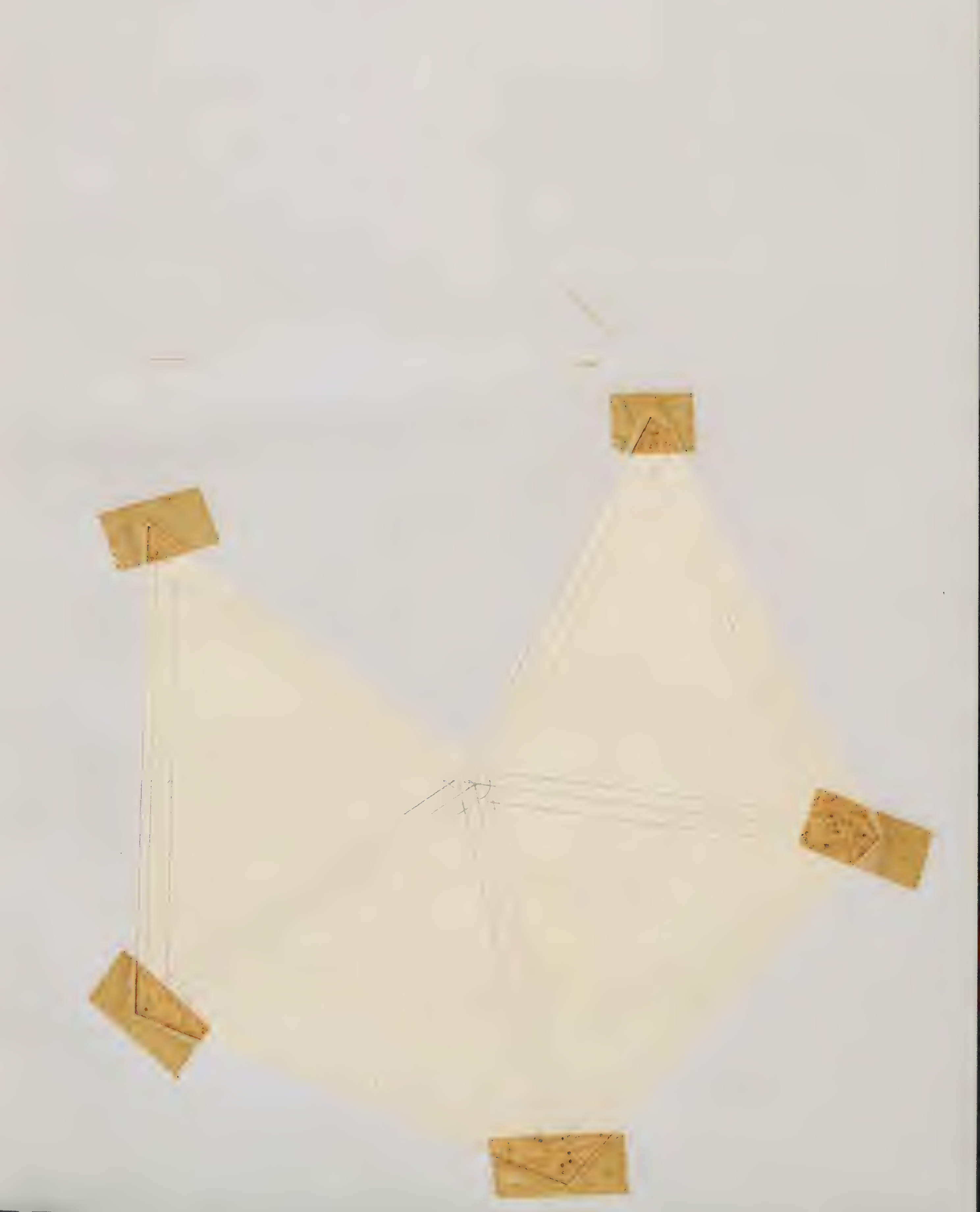


Figura 2



MODELO M - 35.6

PATRONES



ENUNCIADO

MODELO CORPÓREO DEL "ARQUIMEDIANO III" OBTENIDO POR TRUNCADURA DE VÉRTICES DE UN OCTAEDRO REGULAR CONVEXO, DE ARISTA "a_8", AL TOMAR SOBRE CADA ARISTA, Y DESDE SU VÉRTICE, LA DISTANCIA $\frac{1}{2} a_8$.

EL ARQUIMEDIANO OBTENIDO, SE CONSTRUIRÁ CON LAS CARAS MACIZAS, Y EL OCTAEDRO REGULAR GENERADOR, CON LAS CARAS VACIADAS EN LOS VÉRTICES TRUNCADOS.

Radio de la esfera circunscrita al octaedro generador:

$$r_{ec}^{8} = 110 \text{ mm}$$

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo del "ARQUIMEDIANO III", obtenido por truncadura de vértices de un octaedro regular convexo, de arista "a_8", al tomar sobre cada arista, y desde su vértice, la distancia $x = \frac{1}{2} a_8$. - El Arquimediano generado se construirá con las caras macizas, y el octaedro generador, con las caras vaciadas en los vértices truncados.

DATO ÚNICO DE ESTE EJERCICIO: r_{ec}^{8} = radio de la esfera circunscrita al octaedro generador:

$$r_{ec}^{8} = 110 \text{ mm}$$

Teniendo presente lo expuesto en las CONSIDERACIONES PREVIAS del modelo M-40.5, en las que se destaca el proceso geométrico denominado TRUNCADURA DE VÉRTICES de los poliedros regulares convexos, y por el que se obtienen muchos de los POLIEDROS ARQUIMEDIANOS, entre los que se encuentra el ARQUIMEDIANO III de este ejercicio, podemos establecer de inmediato las siguientes propiedades del poliedro núcleo que se obtiene por truncadura de vértices del octaedro regular convexo, a la distancia $x = \frac{1}{2} a_8$. El valor de "x" se obtiene por



		Modelo M-35.7

las condiciones geométricas siguientes, cuando el plano secante produzca:

a) En las caras del octaedro generador, polígonos regulares convexos de igual (o doble) número de lados que los de las mencionadas caras (en este caso particular, estos polígonos serán triángulos equiláteros, cuyos vértices son los centros de los lados de las caras del octaedro.)

b) En los ángulos sólidos de los vértices, polígonos regulares convexos de tantos lados como caras concurran en los vértices de dichos ángulos sólidos, y situados en el plano secante (en este caso particular serán "cuadrados").

Así pues: Por la condición a) el poliedro núcleo tendrá ocho caras triangulares equiláteras, C_3 sobre las caras del poliedro generador, y

Por la condición b), tendrá también seis caras cuadradas. C_4 sobre el plano secante

Consecuentemente, el poliedro núcleo resultante de esta truncadura de vértices, tendrá las siguientes características geométricas:

UNE A4 210 x 297

Tabarca   Octubre 1980



1) Número de caras triangulares regulares = $8\ C_3$

2) Número de caras cuadradas = $6\ C_4$

3) Número de vértices = $\frac{8 \times 3 + 6 \times 4}{4} = 12\ V$

4) Número de aristas = $\frac{8 \times 3 + 6 \times 4}{2} = 24\ A$

5) Número de caras en cada vértice = $2\,C_3 + 2\,C_4$

Así pues, y a la vista de los resultados anteriores, se deduce que el poliedro núcleo convexo, resultante de la truncadura de vértices en el octaedro regular convexo, es un ARQUIMEDIANO III, estudiado y representado en el ejercicio G.E. nº.... .- Lámina 35.

Las conclusiones anteriores justifican el enunciado de este ejercicio

---

CÁLCULO ANALÍTICO DE LONGITUDES

Previamente a la construcción de este modelo, calculamos las siguientes magnitudes en función de r_{ec}^{8}; dato de este ejercicio.

1) Arista "a_8" del octaedro generador

Se deduce de la fórmula "$r_{ec}^{8} = \frac{\sqrt{2}}{2}\, a_8$", obtenida en el ejercicio G.E. nº....- Lámina 3; despejando en ella "a_8", tendremos:

UNE A4 210 x 297

[illegible] Octubre 1980

Modelo M-35.7

$$\boxed{a_8} = r_{ec}^{8} : \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2}{\sqrt{2}} r_{ec}^{8} = \boxed{\sqrt{2}\ r_{ec}^{8}} \qquad (1)$$

---

2) Distancia "x" en la que la truncadura de vértices del octaedro regular convexo, produce el ARQUIMEDIANO III

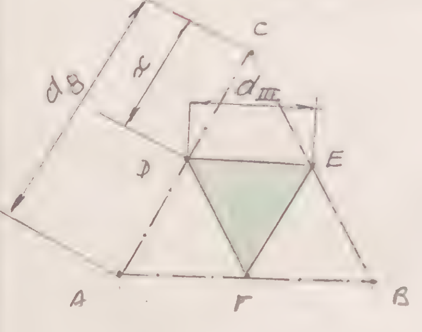


Figura 1

Sea (fig. 1) ABC una cara del octaedro generador de arista $\overline{AC} = a_8$; la sección a la distancia "x", para que el triángulo DEF, sea equilátero, ha de hacerse a la distancia $x = \frac{1}{2} a_8$ verificándose que $\overline{CD} = \overline{DE} = \frac{1}{2}\overline{CD}$, o sea:

$$\boxed{x = a_{III} = \frac{1}{2} a_8}$$ de donde se deduce:

$$\boxed{x} = \frac{1}{2} a_8 = \frac{1}{2} \times \sqrt{2}\ r_{ec}^{8} = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2} r_{ec}^{8}} \qquad (2)$$

---

3) Arista "a_{III}" del ARQUIMEDIANO III

Es igual a la distancia "x"

$$\boxed{a_{III} = \frac{\sqrt{2}}{2} r_{ec}^{8}} \qquad (3)$$

Las fórmulas (1) y (3) aplicadas al modelo estudiado nos dan los siguientes valores numéricos:

(1) $\boxed{a_8} = \sqrt{2}\ r_{ec}^{8} \cong 1.41\,42\,13\,56\,2\ldots \times 110 \cong \boxed{155.6\ \text{mm}}$

UNE A4 210 x 297

Calvarez Octubre 1980



(2) $$\boxed{a_{III}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \, r_{ec}^{8} \cong 0.70\,71\,05\,78\,1\ldots \times 110 \cong \boxed{77.8 \text{ mm}}$$

CONSTRUCCIÓN DEL MODELO PROPUESTO

Para la construcción de este modelo son necesarias las siguientes piezas:

A) ARQUIMEDIANO NÚCLEO III DE CARAS MACIZAS

PIEZA Nº 1 CARAS LATERALES TRIANGULARES REGULARES 8 unidades

La forma y dimensiones se detallan en la figura 2

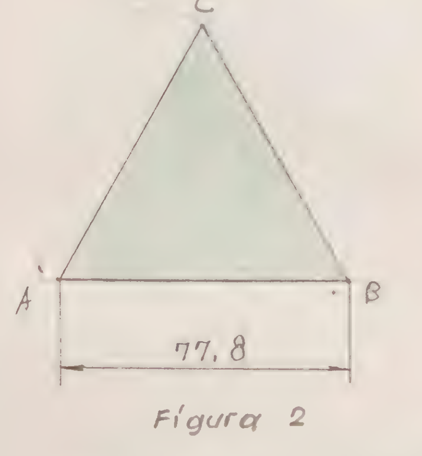


Figura 2

PIEZA Nº 1 8 (u)

Figura 2

PIEZA Nº 2 CARAS LATERALES CUADRADAS 6 unidades

La forma y dimensiones se detallan en la figura 3

D C
A B
77.8 □

Figura 3

PIEZA Nº 2 6 (u)

Figura 3



Modelo M- 35.7

PIEZA Nº 3   REFUERZO NORMAL EN CARAS TRIANGULARES REGULARES   8 unidades

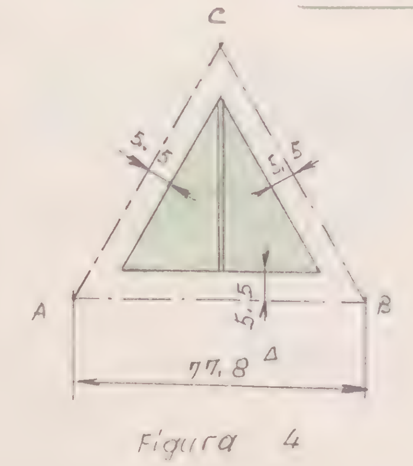


Figura 4

Su forma y dimensiones se deducen de las del triángulo ABC de la figura 2, y se detallan en la figura 4

PIEZA Nº 3   8 (u)

Figura 4

PIEZA Nº 4   REFUERZO NORMAL EN CARAS CUADRADAS   6 unidades

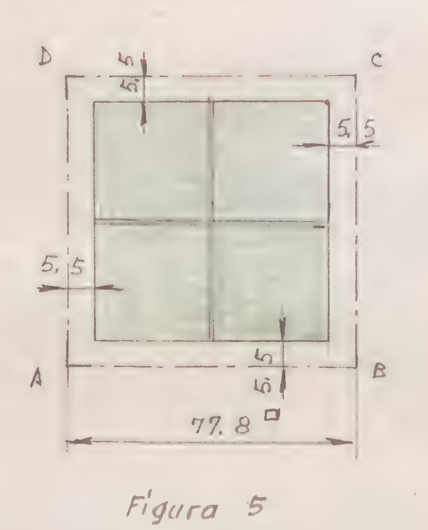


Figura 5

Su forma y dimensiones se deducen de las del cuadrado ABCD de la figura 3, y se detallan en la figura 5

PIEZA Nº 4   6 (u)

Figura 5

PIEZA Nº 5   REFUERZO TRANSVERSAL EN CARAS TRIANGULARES REGULARES   16 unidades

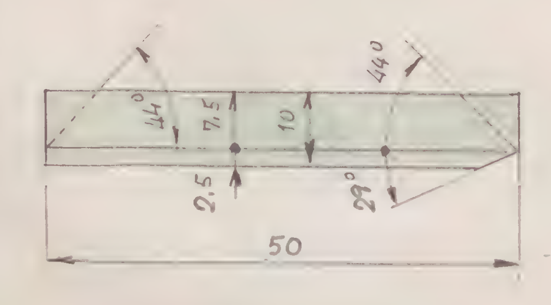


Figura 6

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 6; su colocación, en la figura 4

PIEZA Nº 5   16 (u)

Figura 6

Alvarez   Octubre 1980



Modelo M - 35.17

PIEZA Nº 6 REFUERZO TRANSVERSAL EN CARAS CUADRADAS

24 unidades

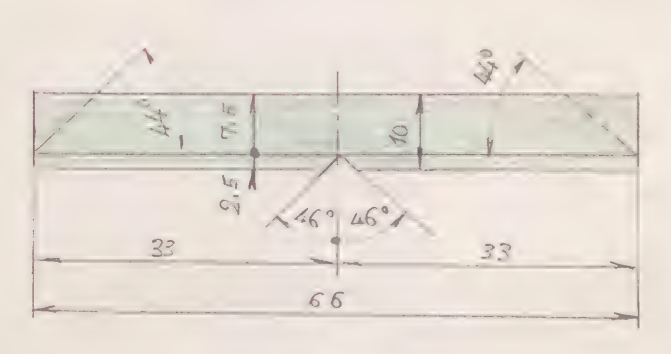


Figura 7

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 7; su colocación, en la figura 5.

PIEZA Nº 6 24 (u)

Figura 7

PIEZA Nº 7 UNIONES ARISTAS 24 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 8

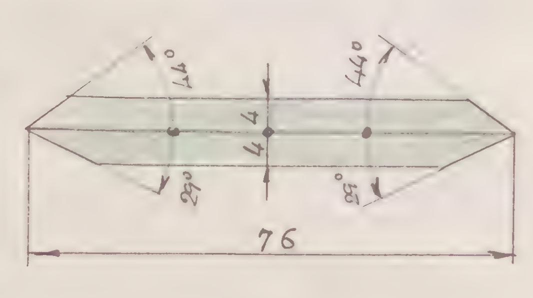


Figura 8

PIEZA Nº 7 24 (u)

Figura 8

PIEZA Nº 8 FORRO COLOREADO EN CARAS TRIANGULARES REGULARES 8 unidades

Su forma y dimensiones se deducen de las del triángulo ABC de la figura 2 y se detallan en la figura 9.

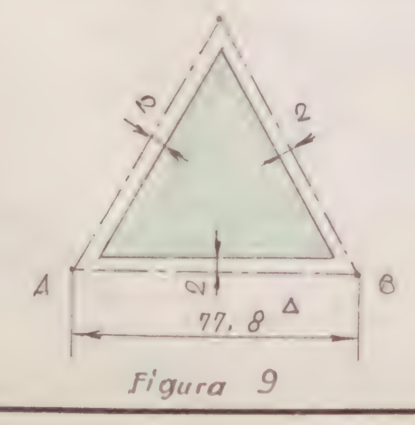


Figura 9

PIEZA Nº 8 8 (u)

Figura 9

UNE A4 210 x 297

Octubre 1980



Modelo M-35.7

PIEZA Nº 9 FORRO COLOREADO EN CARAS CUADRADAS

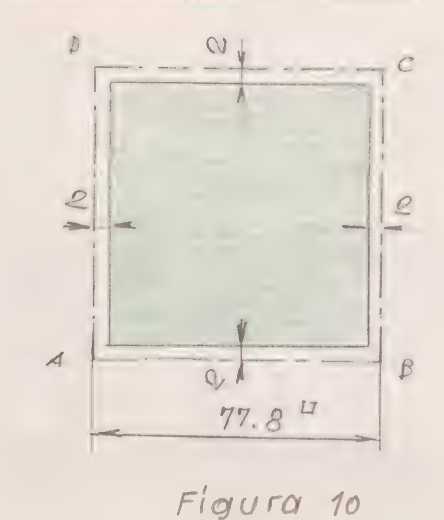


Figura 10

6 unidades

Su forma y dimensiones se deducen de las del cuadrado ABCD de la figura 3, y se detallan en la figura 10

PIEZA Nº 9 6 (u)

Figura 10



B) OCTAEDRO GENERADOR DE CARAS VACIADAS

Queda reducido a seis pirámides regulares, rectas, de base cuadrada, cuyo desarrollo es el siguiente:

PIEZA Nº 10 DESARROLLO LATERAL DE LAS SEIS PIRÁMIDES TRUNCADAS 6 unidades

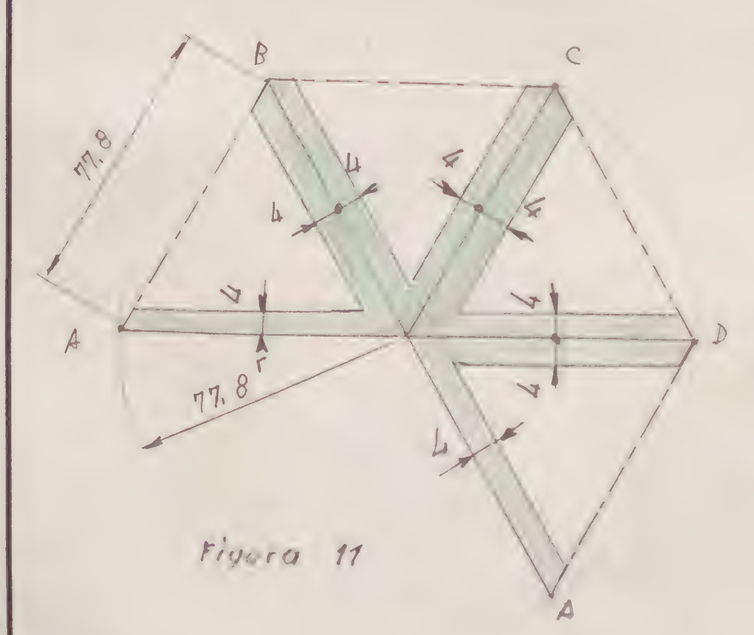


Figura 11

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 11.

PIEZA Nº 10

8 (u)

Figura 10

Octubre 1980



Modelo M-35.7

PIEZA Nº 11 UNIONES ARISTAS 32 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 12

PIEZA Nº 11 24 (u)

Figura 12

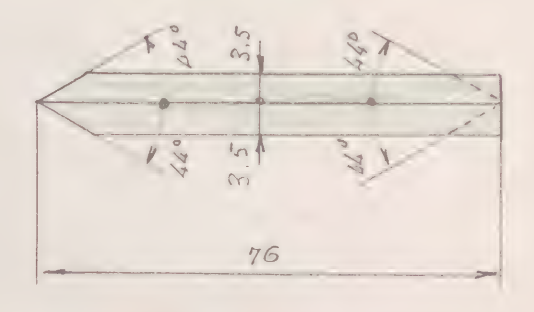


Figura 12

Alvarez Octubre 1980

MODELO M-35,7 PATRONES

VARIANTE DEL MODELO CORPÓREO M-35.7, CONSISTENTE EN ADICIONAR AL MISMO, OCHO PIRÁMIDES RECTAS, TRIANGULARES, REGULARES, DE CARAS VACIADAS, QUE TENGAN POR BASES LAS CARAS TRIANGULARES DEL "ARQUIMEDIANO III" GENERADO, Y POR VÉRTICES, LAS PROYECCIONES, SOBRE LA ESFERA CIRCUNSCRITA AL OCTAEDRO GENERADOR, DE LOS CENTROS DE LAS CARAS TRIANGULARES, DESDE EL CENTRO DEL POLIEDRO GENERADOR "O".

Radio de la esfera circunscrita:

$$r_{cc}^{8} = 110 \text{ mm.}$$

ENUNCIADO: Construir el modelo corpóreo obtenido al adicionar al modelo M-35.7, ocho pirámides rectas, triangulares, regulares, de caras vaciadas, que tengan por bases las caras triangulares del "Arquimediano III" generado, y por vértices las proyecciones, sobre la esfera circunscrita al octaedro generador, de los centros de las caras triangulares, desde el centro "O" del poliedro generador.

Como se deduce de este enunciado, ha de construirse previamente un modelo igual al M-35.7, al cual ha de añadírsele ocho pirámides rectas de base triangular, regular, y de caras vaciadas, cuyo desarrollo y dimensiones estudiamos a continuación.

La altura "h_3" de dichas pirámides, se obtiene como diferencia del radio "r_{ec}^{8}" de la esfera circunscrita al octaedro regular convexo generador, y del radio "r_{ei}^{III-3}" de la esfera tangente a las caras triangulares del Arquimediano III generado. Así pues, será:

$$h_3 = r_{ec}^{8} - r_{ei}^{III-3} \qquad (1)$$

El radio r_{ec}^{8}, se obtuvo en el ejercicio G.E. nº... - Lámina 2,

UNE A4 210 x 297

Octubre 1980



en función de la arista "a_8" del octaedro generador. Su valor es:

$$r_{ec}^{8} = \frac{\sqrt{2}}{2}\, a_8 \qquad (2)$$

El radio "r_{ei}^{III-3}" de la esfera tangente a las caras triangulares del Arquimediano III, se obtuvo en el ejercicio G.E. nº----. Lámina 35. Su valor, en función de la arista "a_{III}" de dicho Arquimediano, es:

$$r_{ei}^{III-3} = \frac{\sqrt{6}}{3}\, a_{III} \qquad (3)$$

y sustituyendo a_{III} por su valor $\frac{1}{2}\, a_8$ (ver fórmula (2) del ejercicio M-35.7, tendremos:

$$r_{ei}^{III-3} = \frac{\sqrt{6}}{3} \times \frac{1}{2} \times a_8 = \frac{\sqrt{6}}{6}\, a_8 \qquad (4)$$

Sustituyendo en (1) los valores (2) y (4), tendremos:

$$h_3 = r_{ec}^{8} - r_{ei}^{III-3} = \frac{\sqrt{2}}{2}\, a_8 - \frac{\sqrt{6}}{6}\, a_8 = \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{6}}{6}\, a_8 \qquad (5)$$

Sustituyendo en (5) el valor de $a_8 = \sqrt{2}\, r_{ec}^{8}$, en función del radio r_{ec}^{8} de la esfera circunscrita al octaedro generador (ver fórmula (1) del modelo M 35.7), tendremos:

$$h_3 = \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{6}}{6}\, a_8 = \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{6}}{6} \times \sqrt{2}\, r_{ec}^{8} = \frac{6 - 2\sqrt{3}}{6}\, r_{ec}^{8} = \frac{3 - \sqrt{3}}{3}\, r_{ec}^{8} \qquad (6)$$

[signature] Octubre 1980

UNE A4 210 x 297



Para obtener la longitud de la arista "a_3" de las caras laterales de las pirámides triangulares, tendremos en cuenta que "a_3" es la hipotenusa de un triángulo rectángulo, uno de cuyos catetos es "h_3" y el otro es el radio "r_{c-3}" de la circunferencia circunscrita a la cara triangular regular del Arquimediano III. Así pues será:

$$a_3 = \sqrt{(h_3)^2 + (r_{c-3})^2} \qquad (7)$$

El radio r_{c-3} de la circunferencia circunscrita a un triángulo equilátero, en función de su lado l_3, es (ver fórmula (2) del ejercicio G.P. 1.400-4):

$$r_{c-3} = \frac{\sqrt{3}}{3}\, l_3 \qquad (8)$$

En la fórmula (8), aplicada a este estudio, es $l_3 = a_{III}$, siendo a su vez $a_{III} = \frac{1}{2} a_8$, y también $a_8 = \sqrt{2}\, r_{ec}^{8}$ (ver fórmula (2) del modelo M-35.7), por lo que sustituyendo valores, tendremos:

$$l_3 = a_{III} = \frac{1}{2} a_8 = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times r_{ec}^{8} = \frac{\sqrt{2}}{2}\, r_{ec}^{8} \qquad (9)$$

valor que sustituido en (8) nos dará:

$$r_{c-3} = \frac{\sqrt{3}}{3}\, l_3 = \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{2}}{2}\, r_{ec}^{8} = \frac{\sqrt{6}}{6}\, r_{ec}^{8} \qquad (10)$$

Sustituyendo en (7) los valores (6) y (10), tendremos:

[signature] Octubre 1980

$$a_3 = \sqrt{(h_3)^2 + (r_{c-3})^2} = \sqrt{\left[\frac{3-\sqrt{3}}{3} r_{ec}^{8}\right]^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{6} r_{ec}^{8}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{3-\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{6}\right)^2}\; r_{ec}^{8} = \sqrt{\frac{(3-\sqrt{3})^2}{9} + \frac{6}{36}}\; r_{ec}^{8} =$$

$$= \sqrt{\frac{(9+3-6\sqrt{3})}{9} + \frac{1}{6}}\; r_{ec}^{8} = \sqrt{\frac{6 \times (12-6\sqrt{3}) + 9}{54}}\; r_{ec}^{8} =$$

$$= \sqrt{\frac{2 \times (12-6\sqrt{3}) + 3}{18}}\; r_{ec}^{8} = \sqrt{\frac{24 - 12\sqrt{3} + 3}{18}}\; r_{ec}^{8} = \sqrt{\frac{27 - 12\sqrt{3}}{18}}\; r_{ec}^{8} =$$

$$= \boxed{\sqrt{\frac{9 - 4\sqrt{3}}{6}}\; r_{ec}^{8}} \qquad (11)$$

Las fórmulas (9) y (11) nos permiten calcular los elementos necesarios para el desarrollo lateral de las pirámides triangulares que se adicionan al modelo M-35.7, para obtener el que se estudia.

Para este caso particular, es $r_{ec}^{8} = 110$ mm, y por consiguiente:

$$a_{III} = l_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} r_{ec}^{8} \cong 0.70\,71\,06\,78\,1\ldots \times 110 \cong \boxed{77.8 \text{ mm}}$$

y

$$a_3 = \sqrt{\frac{9-4\sqrt{3}}{6}}\; r_{ec}^{8} \cong 0.58\,76\,21\,86\,9\ldots \times 110 \cong \boxed{64.6 \text{ mm}}$$

Para la construcción de este modelo se precisan las siguientes piezas:



A) MODELO CORPÓREO DEL ARQUIMEDIANO III, OBTENIDO POR TRUNCADURA DE VÉRTICES DE UN OCTAEDRO REGULAR CONVEXO A LA DISTANCIA $x = \frac{1}{3} a_8$

Piezas 1 al 11, iguales a las del modelo M-35.7

B) PIRÁMIDES RECTAS, TRIANGULARES REGULARES, DE CARAS VACIADAS QUE SE ADICIONAN AL MODELO M-35.7.

PIEZA Nº 12 DESARROLLO LATERAL DE LAS PIRÁMIDES ADICIONADAS 8 unidades

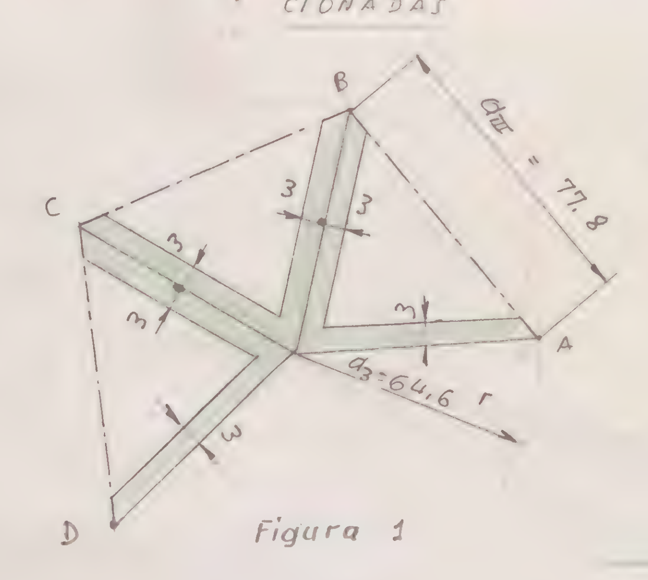


Figura 1

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 1

AB = BC = CD = 77.8 mm

PIEZA Nº 12 8 (u)

Figura 1

PIEZA Nº 13 UNIONES ARISTAS 24 unidades

Su forma y dimensiones se detallan en la figura 2

36° 2.5 52°
36° 2.5 52°
63

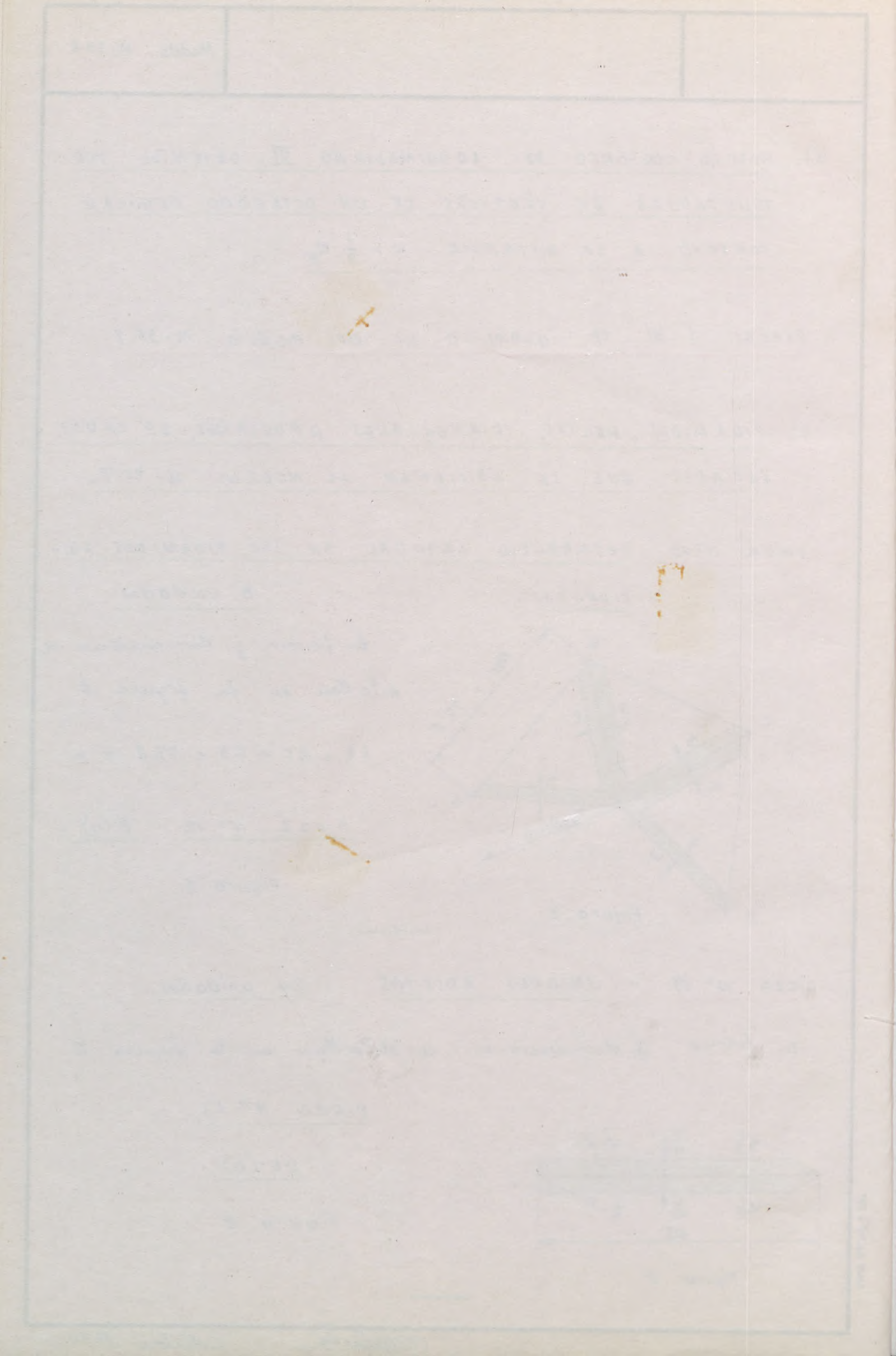
Figura 2

PIEZA Nº 13

24 (u)

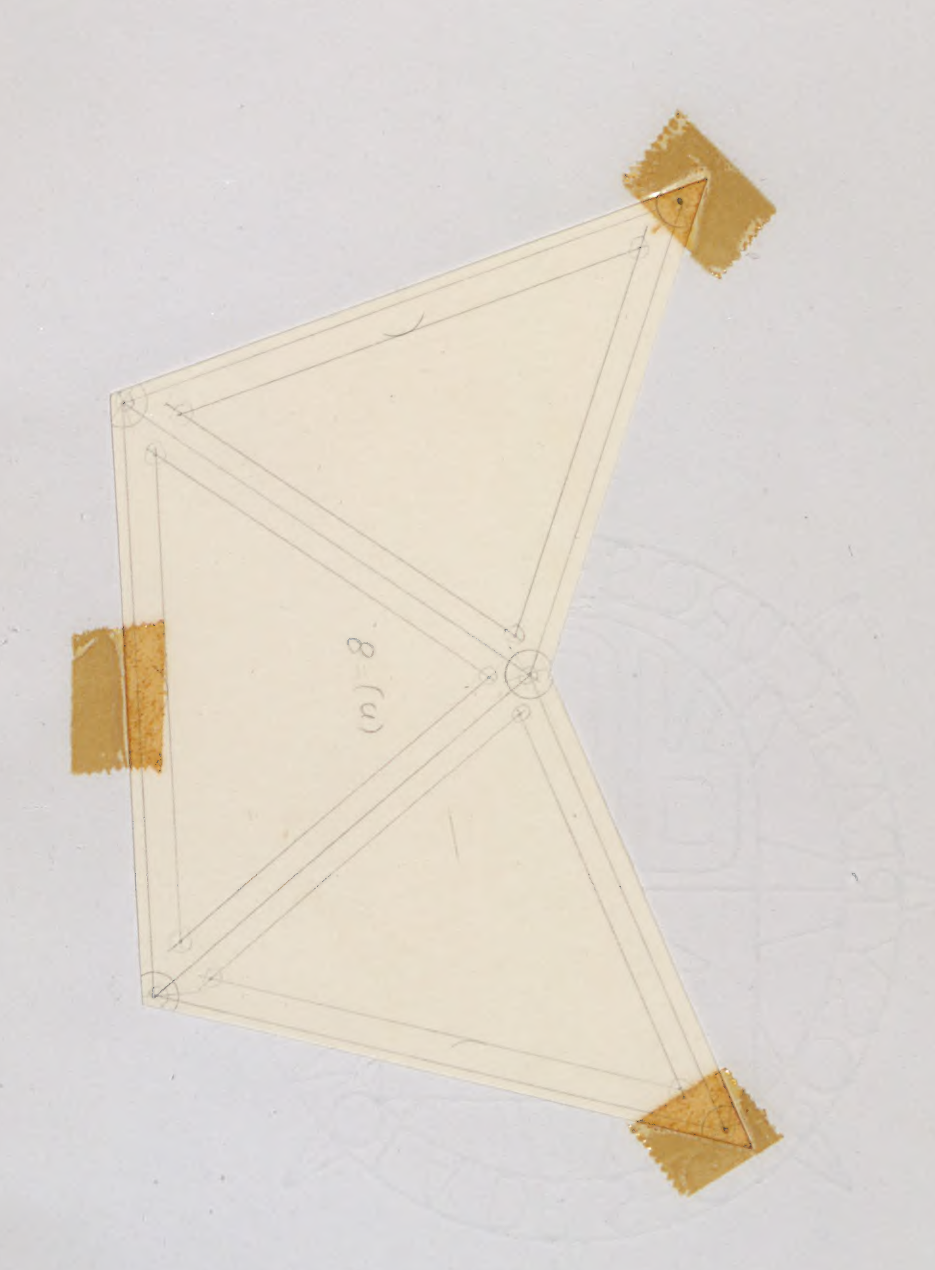
Figura 2

UNE A4 210 x 297



MODELO M - 35.8

PATRONES



colorchecker CLASSIC

calibrite

mm